فصل ۰ صفر

۱) معرفی مجموعه‌ها	۲) اعداد حقیقی و خط حقیقی
۳) بسط اعشاری اعداد گویا	۴) سورها
۵) ترتیب و نامساوی‌ها	۶) بازه اعداد
۷) همسایگی	۸) قدرمطلق
۹) جزء صحیح	

یادآوری: مجموعه‌هایی که تاکنون بعضی از آنها را سال‌های قبل یاد گرفته‌ایم و یا در این درس، با آنها سروکار داریم به شکل مختصر آنها را ارائه می‌دهیم.

۱) مجموعه اعداد طبیعی N : $N=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

۲) مجموعه اعداد طبیعی زوج E : $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

۳) مجموعه اعداد طبیعی فرد O : $O=\{۱,۳,۵,۷,...\}$

۴) مجموعه اعداد اول P : $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$

۵) مجموعه اعداد حسابی W: $W=I=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

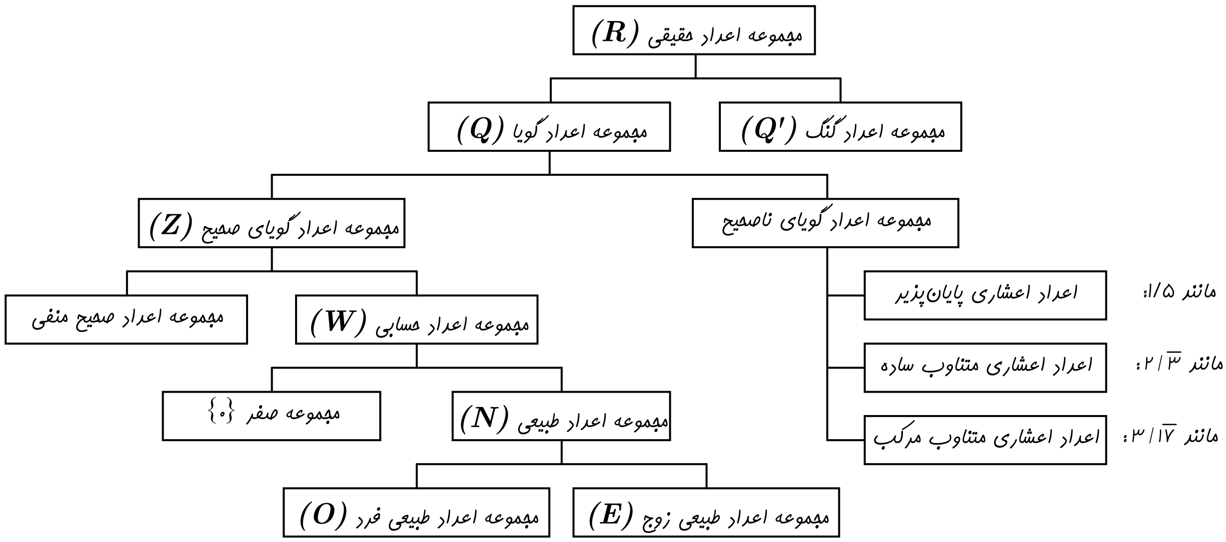
۶) مجموعه اعداد صحیح Z : $Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

۷) مجموعه اعداد گویا Q : $Q=\left\{\frac{a}{b}:a,b\in Z,b\neq ۰\right\}$

یعنی هر عدد حقیقی که بتوانیم به صورت کسر متعارفی بنویسیم عدد گویا است که مخرج کسر متعارفی هیچگاه صفر نیست.

۸) مجموعه اعداد گنگ (اصم) Q' به $Q'=Q^C=\{x:x\in R,x\notin Q\}$ به عبارتی: $\boxed{Q^C=R-Q}$

تذکر: ارتباط بین مجموعه‌هایی که با آنها آشنا شده‌اید به شکل نمودار درختی به صورت زیر نشان می‌دهیم.



با توجه به نمودار درختی فوق داریم:

الف: $E,O\subset N\subset W\subset Z\subset Q\subset R$

ب: $R=Q\cup Q^C$

مجموعه اعداد حقیقی

مجموعه R به همراه دو عمل جمع و ضرب دارای خواص زیر است.

الف: خواص جمع:

۱) بسته بودن نسبت به عمل جمع: یعنی برای هر دو عضو دلخواه a و b در R داریم: $(a+b)\in R$

۲) جابجایی جمع: یعنی برای هر دو عضو دلخواه $a,b\in R$ داریم: $a+b=b+a$

۳) وجود عضو بی اثر جمع، یعنی $۰\in R$ وجود دارد به طوری که برای هر عضو $a\in R$ داریم: $a+۰=۰+a=a$

۴) شرکت‌پذیری جمع: یعنی برای هر ۳ عضو دلخواه $a,b,c\in R$ داریم: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

۵) وجود قرینه برای هر عضو: یعنی برای هر عضو مانند $a\in R$، عضو $(-a)\in R$ وجود دارد که به طوری که $a+(-a)=(-a)+a=۰$

۶) بسته بودن نسبت به عمل تفاضل a داریم: $a-b=a+(-b)$ بنابراین: $\forall a,b\in R:(a-b)\in R\ ,\ (b-a)\in R$

ب: خواص ضرب:

۱) بسته بودن نسبت به ضرب: یعنی $\forall a,b\in R:(a\times b)\in R$

۲) جابجایی ضرب: یعنی $\forall a,b\in R:a\times b=b\times a$

۳) وجود عضو بی اثر ضرب: یعنی عضو $۱\in R$ وجود دارد به طوری که $a\times ۱=۱\times a=a$

۴) شرکت‌پذیری ضرب: یعنی برای هر سه عضو دلخواه $a,b,c\in R$ داریم: $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c=a\times b\times c$

۵) وجود معکوس برای هر عضو غیرصفر: یعنی اگر $a\in R$ و $a\neq ۰$ باشد آنگاه $a^{-۱}\in R$ وجود دارد به طوری که $a\times a^{-۱}=a^{-۱}\times a=۱$ و می‌دانیم

$\boxed{a^{-۱}=\frac{۱}{a},a\neq ۰}$

۶) بسته بودن $R-\{0\}$ نسبت به عمل تقسیم؛ یعنی اگر $a,b\in R-\{0\}$ باشند آنگاه $a\times\frac{1}{b}\in R$ و ضمناً $a\times\frac{1}{b}$ را به $\frac{a}{b}$ یا $(a\div b)$ نمایش می‌دهند.

ج: پخش ضرب نسبت به +

اگر a و b و c عضوهای دلخواه R باشند داریم:

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$(b+c)\times a=(b\times a)+c\times a$

به عبارتی ضرب نسبت به جمع خاصیت پخشی دوطرفه دارد.

مثال: ثابت کنید عضو صفر از R منحصر به فرد است.

مثال: ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید $-(x+y)=-x-y$

مثال: ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x، $-(-x)=x$

مثال: برای هر ۳ عدد حقیقی x و y و z، اگر $x+z=y+z$ آنگاه $x=y$ (قانون حذف)

مثال: ثابت کنید وارون هر عدد حقیقی (غیرصفر) منحصر به فرد است.

مثال: نشان دهید وارون وارون هر عدد حقیقی غیرصفر مانند x برابر با x است به عبارتی $x=(x^{-1})^{-1}$

مثال: ثابت کنید برای هر ۳ عدد حقیقی x و y و z، $x(y-z)=xy-xz$

مثال: ثابت کنید هرگاه $xy=0$ آنگاه $x=0$ یا $y=0$ و عکس این حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y

الف: $x(-y)=(-x)y=-(xy)$

ب: $(-x)(-y)=xy$

چند ویژگی درباره اعداد گویا و گنگ

۱) مجموع و تفاضل هر دو عدد گویا عددی گویا است یعنی Q نسبت به (+ و −) بسته است.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}\in Q$$

۲) حاصلضرب هر دو عدد گویا عددی گویا است یعنی Q نسبت به $(\times)$ بسته است.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\in Q$$

۳) خارج قسمت دو عدد گویای مخالف صفر همواره عددی گویا است.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}\in Q$$

۴) مجموع هر عدد گنگ با هر عدد گویا، عددی گنگ است.

$$(۲+\sqrt{۳})\in Q'$$

۵) حاصلضرب هر عدد گنگ در هر عدد گویای غیرصفر عددی گنگ است.

$$\forall a\in Q, b\in Q' \Rightarrow \begin{cases} a\neq ۰ \Rightarrow ab\in Q' \\ a=۰ \Rightarrow ab=۰\in Q \end{cases}$$

۶) مجموع یا تفاضل دو عدد گنگ می‌تواند گویا یا گنگ باشد.

۷) حاصلضرب و تقسیم دو عدد گنگ می‌تواند گویا یا گنگ باشد.

۸) بین هر دو عدد حقیقی متمایز بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد؟

مثال: اگر a و b اعداد گنگ باشند کدام یک از اعداد زیر حتماً گنگ هستند.

۱) $a^۲+b$ ۲) $\sqrt{a}+۴$ ۳) $\frac{b}{۳}+۵$ ۴) $a^۳b$

نکته: اگر a عدد گویا و n طبیعی باشد آنگاه: a^n عدد گویا است.

اگر a عدد گنگ و مثبت و n طبیعی آنگاه: $\sqrt[n]{a}$ عددی گنگ است.

تست ۱: اگر α و β اعداد گنگ باشند چندتا از اعداد $\alpha^\beta, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \sqrt[\alpha]{\beta}$ حتماً گنگ هستند $(n\in N)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۲: اگر a و b دو عدد گویا باشند برای اینکه $\frac{a(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}-۱}-\frac{b(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱}$ عدد گویا باشد لازم است داشته باشیم:

۱) $a=-b$ ۲) $a=b$ ۳) $ab=۱$ ۴) $ab=-۱$

تست ۳: اگر a یک عدد گویا و b یک عدد گنگ باشد کدام عدد زیر لزوماً گنگ است؟

۱) $\sqrt[3]{a}$ ۲) $a+\sqrt[3]{a}$ ۳) $\sqrt[3]{b}$ ۴) $a\sqrt[3]{b}$

تست ۴: کدام مجموعه زیر متناهی است؟

۱) $\{x : x \in Z, x^2 > 100\}$ ۲) $\{x : x \in Q, x^2 < 10\}$ ۳) $\{x : x \in Z, x^2 < 1000\}$ ۴) $\{x : x \in Q', x^2 > 10\}$

تست ۵: اگر عددی گنگ باشد کدام یک از اعداد زیر همواره گنگ است؟

۱) $a^2 + 3a$ ۲) $\frac{3a+2}{a-1}$ ۳) $a+\frac{1}{a}$ ۴) $a^3 + 1$

تست ۶: کدام عدد زیر وجود ندارد؟

۱) کوچکترین عدد گنگ بزرگتر از ۱
۲) عدد گنگ بین اعداد 10^{-4} و 10^{-5}
۳) بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از ۳-
۴) بزرگترین عدد طبیعی بزرگتر از ۲-

تست ۷: در اثبات هرگاه $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$ از کدام یک از اصل‌های زیر استفاده نشده؟

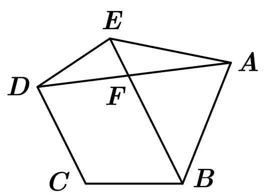
۱) وجود عضو وارون ۲) شرکت‌پذیری در ضرب ۳) وجود عضو خنثی در ضرب ۴) پخش ضرب روی جمع

تست ۸: اگر x و y اعداد حقیقی ناصفر باشند برای اثبات تساوی $x^{-1}y^{-1}(x+y)=x^{-1}+y^{-1}$ از کدام اصل بیان شده (در ویژگی‌های اعداد حقیقی) استفاده نشده است؟

۱) وجود عضو همانی جمع ۲) پخش ضرب روی جمع ۳) جابجایی ضرب ۴) جابجایی جمع

تمرین ۱: ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع عددی گنگ است (قضیه هیپاسوس) (**تمرین** کتاب درسی)

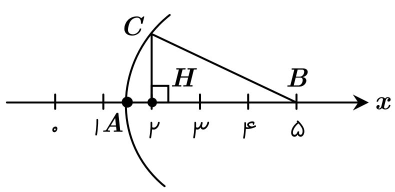
راهنمایی: ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



تمرین ۲: ثابت کنید اعداد $\log ۳$ و $۲+\sqrt{۳}$ اعداد گنگ هستند.

تمرین ۳: اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-۱$ و $۲+\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد نشان دهید (به کمک رسم مثلث قائم‌الزاویه)

تست ۱: مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای BCH را در نظر می‌گیریم، سپس دهانه پرگار را به اندازه وتر مثلث باز نموده و به مرکز B کمانی می‌زنیم تا این کمان محور افقی را در نقطه A قطع کند، نقطه A نظیر کدام عدد حقیقی است ($CH=۱$)



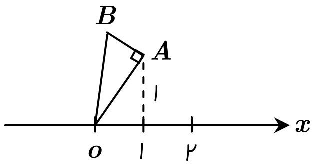
۱) $۵-\sqrt{۱۰}$

۲) $۵-\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۱۰}$

تست ۲: با توجه به شکل روبرو اگر کمانی به مرکز o و به اندازه oB زده شود که محور افقی را قطع کند این نقطه با کدام عدد حقیقی متناظر است؟



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $\sqrt{۶}$

تست ۳: در مورد یک پنج ضلعی منتظم به ضلع a کدام گزینه صحیح است؟

۱) نسبت طول قطر به طول ضلع عدد گنگ است.

۲) اگر طول ضلع عدد گنگ باشد، طول قطر نیز گنگ است.

۳) اگر طول قطر عددی گنگ باشد آنگاه طول ضلع عدد گنگ است.

۴) نسبت مقدار به ضلع برابر $\sqrt{۵}+۱$ است.

بسط اعشاری اعداد گویا

الف: یک اعداد اعشاری پایان‌پذیر: $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$, $\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵$

ب: بسط اعشاری متناوب ساده: $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳...=۰/\overline{۳}$

ج: بسط اعشاری متناوب مرکب: $\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳...=۰/۸\overline{۳}$

قابل توضیح است که در بسط اعشاری متناوب ساده و یا مرکب، دسته ارقامی که مرتب تکرار می‌شوند را دوره گردش عدد نامند و تعدادی رقم که بین ممیز و دوره گردش قرار دارند را ارقام غیرگردش می‌نامند.

دارای ۶ رقم گردش است: $\frac{۷}{۱۳}=۰/\overline{۵۳۸۴۶۱}$

دارای ۵ رقم گردش و ۴ رقم غیرگردش است : $\frac{۱}{۵۶}=۰/۰۰۱۷\overline{۸۵۱۴۲}$

تذکر:

$\begin{cases} 0/\overline{7} = \frac{7}{9} \\ 0/\overline{23} = \frac{23}{99} \end{cases}$ ؛ $\frac{\text{عدد گردش}}{\text{۹ به تعداد ارقام عدد گردش}}=$ کسر متعارفی عدد اعشاری متناوب ساده

$\frac{\text{(عدد غیر گردش)} - \text{(عدد گردش و غیرگردش)}}{\text{۹ به تعداد ارقام عدد گردش}}=$ کسر متعارفی عدد اعشاری متناوب مرکب

$0/0\overline{1785} = \frac{1785-1}{99900} = \frac{426}{23975}$

مثال: عدد اعشاری $0/02\overline{537}$ را به صورت یک کسری بنویسید (نهایی ۹۲)

نتیجه $\boxed{0/a_1a_2...a_m\overline{b_1b_2...b_n} = \frac{a_1a_2...a_mb_1b_2-b_n-a_1a_2...a_m}{\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{0...0}_{m}}}$

مثال: اگر عدد اعشاری $0/1a\overline{b}$ برابر با $\frac{1}{2}$ باشد، b را بیابید؟

مثال: اگر $\frac{x}{11}$ مولد عدد اعشاری $0/\overline{7y}$ باشد $x+y$ را بیابید؟

مثال: عدد $2/3222000$ را به صورت $\frac{\overline{20a}}{90}$ نوشته‌ایم در این صورت $a=?$

مثال: حاصل $A=(0/\overline{12} \div 0/\overline{3}) + 1/2\overline{81}$ کدام است؟

تست ۱: حاصل کسر $\frac{0/\overline{692}}{0/\overline{1}+0/\overline{235}}$ کدام است؟ (آزاد ۹۰)

۱) $\frac{692}{335}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{692}{345}$

تست ۲: حاصل $5\sqrt{0/01\overline{7}}+3\sqrt{0/\overline{4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

تست ۳: کسر متعارفی ...۰/۲۳۴۳۴۳۴ به صورت $\frac{a}{b}$ می‌باشد اگر a و b نسبت به هم اول باشند آنگاه مجموع رقم‌های یکان a و b کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۳

تست ۴: کسر مولد $0/2\overline{ab}$ برابر $\frac{23}{99}$ است، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تست ۵: اگر $\frac{\overline{3m}}{99}$ مولد عدد اعشاری $0/3\overline{ab}$ باشد $\max(a+b)=?$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

تست ۶: اگر کسر مولد $0/5\overline{ba}$ برابر $\frac{52}{99}$ باشد $a+b=?$

یادآوری: سورها علائمی هستند که در احکام ریاضی از آنها استفاده می‌شود و عبارتند از:

۱) سور عمومی که با نماد $\forall$ نشان داده می‌شود و $\forall x\in A, P(x)$ هنگامی درست است که $P(x)$ برای همه عضوهای مجموعه A درست باشد (مثال: $\forall x\in R:(x^2 \pm x+1)>0$)

۲) سور وجودی که با نماد $\exists$ نشان داده می‌شود و $\exists x\in A, P(x)$، هنگامی درست است که $P(x)$ حداقل برای یک عضو x از مجموعه A درست باشد (مثال: $\exists x\in R:x^2-4x+3=0$)

۳) سور صفر که با نماد $\nexists$ نشان داده می‌شود و $\nexists x\in A, P(x)$ هنگامی درست است که $P(x)$ به ازای هیچ عضو x از مجموعه A برقرار نباشد (مثال: $\nexists x\in R:x^2+x+3=0$)

تست ۱: کدام گزاره زیر درست است؟

۱) $\forall x\in R:\tan x.\cot x=1$

۲) $\exists x\in R:x^2+x+2=0$

۳) $\nexists x\in R:x^3+5x-1=0$

۴) $\forall x\in R:x^2+y^2-2y+1\geq 0$

تست ۲: کدام گزاره زیر درست است؟

۱) $\forall x\in R,\forall y\in R:x^2-y^2>2$

۲) $\exists x\in R,\exists y\in Z:x^2+y^2+1=0$

۳) $\exists x\in R,\forall y\in R:x<y$

۴) $\forall x\in R\ \exists y\in R:x<y$

تست ۳: کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall x\in R:x^2+2x-4<0$

۲) $\exists x\in R:x^2+x+2<0$

۳) $\nexists x\in R:x^2-x+1<0$

۴) $\exists x\in Z:x^2+5x-1=0$

تست ۴: کدام گزینه زیر نادرست است؟

۱) $\forall x\in Z:x^2+x\in Z$

۲) $\forall x\in Q:x^2+x\in Q$

۳) $\forall x\in Q':x^2+x\in Q'$

۴) $\forall x\in W:(x^2+x)\in W$

تذکر: هر عدد حقیقی که بسط اعشاری آن، پایان‌ناپذیر ولی متناوب نباشد، گنگ یا اصم نامیده می‌شود، بنابراین اعداد گنگ، اعدادی هستند که بسط اعشاری آنها بی پایان است ولی متناوب نیستند.

عدد $e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴...$ عدد پی $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳$ $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲$

ترتیب و نامساوی‌ها

اگر رابطه $\leq$ را به عنوان رابطه ترتیب در نظر بگیریم آنگاه:

۱) $b<a$ یا $a=b$ یا $a<b$: $\forall a,b\in R$

۲) $\forall a,b,c\in R: a<b, b<c \rightarrow a<c$

۳) مجموعه اعداد حقیقی یک مجموعه مرتب است.

خواص نامساوی‌ها

۱) $\forall a\in R: a\leq a$

۲) $\forall a,b\in R: a\leq b, b\leq a \leftrightarrow a=b$

۳) $a<b, c<d \Rightarrow a+c<b+d$

۴) $a<b, c<d \not\Rightarrow a-c<b-d$

۵) $a<b, c\in R \rightarrow a+c<b+c$

۶) $a<b, c>۰ \rightarrow ac<bc$

۷) $a<b, c<۰ \rightarrow ac>bc$

۸) $a<b \rightarrow a^{۲n+۱}<b^{۲n+۱}$

۹) $a<b, a,b>۰ \rightarrow a^{۲n}<b^{۲n}$

۱۰) $a>۰ \rightarrow \frac{۱}{a}>۰, a<۰ \rightarrow \frac{۱}{a}<۰$

۱۱) $a,b>۰, a<b \rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}$

۱۲) $a,b,c,d>۰, a<b, c<d \rightarrow ac<bd$

۱۳) $\forall a,b\in R: a^{۲}\mp ab+b^{۲}\geq ۰$

۱۴) $\forall a,b>۰ \rightarrow \sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{۲}$

۱۵) $\begin{cases} ۰<a<۱ \to \sqrt[n]{a}>a \\ a>۱, m>n \to a^m>a^n \end{cases}$

۱۶) $n\in N, ۰<a<۱ \to ۰<a^n<۱$

۱۷) $ab>۰ \to a>۰, b>۰$ یا $a<۰, b<۰$

۱۸) $\begin{cases} a>۰ \to -a<۰ \\ a<۰ \to -a>۰ \end{cases}$

۱۹) $a<۰<b \to \frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$

۲۰) $a<b<۰ \to a^{۲n}>b^{۲n}>۰$

نکته:

$$\boxed{\begin{array}{l} a>۰ \to a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \\ a<۰ \to a+\frac{۱}{a}\leq -۲ \\ a\neq ۰ \to |a+\frac{۱}{a}|\geq ۲ \end{array}}$$

مثال: کوچکترین مقدار مجموعه $A=\left\{۳\tan x+۲\cot x : ۰<x<\frac{\pi}{۲}\right\}$ را بیابید؟

حل: با استفاده از ویژگی شماره ۱۴

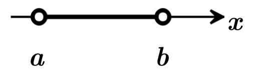
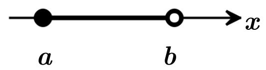
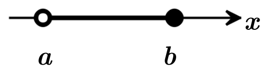
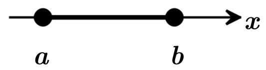
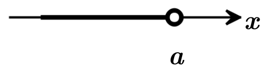
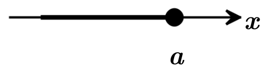
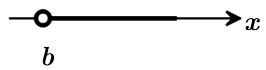
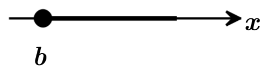
$$۳\tan x+۲\cot x\geq ۲\sqrt{(۳\tan x)(۲\cot x)}$$

$$۳\tan x+۳\cot x\geq ۲\sqrt{۶} \Rightarrow \min A=۲\sqrt{۶}$$

مثال: نامعادله $-\frac{۲}{x}>\frac{۵}{x-۱}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

بازه اعداد

به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی که به صورت‌های زیر تعریف می‌شود یک بازه گویند.

نمودار	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نامساوی	x عدد حقیق است
	(a,b)	$\{x:a<x<b\}$	$a<x<b$	بزرگتر از a و کوچکتر از b
	$[a,b)$	$\{x:a\leq x<b\}$	$a\leq x<b$	بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر از b
	$(a,b]$	$\{x:a\leq x\leq b\}$	$a<x\leq b$	بزرگتر از a و کوچکتر یا مساوی b
	$[a,b]$	$\{x:a\leq x\leq b\}$	$a\leq x\leq b$	بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر یا مساوی b
	$(-\infty,a)$	$\{x:x<a\}$	$x<a$	کوچکتر از a
	$(-\infty,a]$	$\{x:x\leq a\}$	$x\leq a$	کوچکتر یا مساوی a
	$(b,+\infty)$	$\{x:x>b\}$	$x>b$	بزرگتر از b
	$[b,+\infty)$	$\{x:x\geq b\}$	$x\geq b$	بزرگتر یا مساوی b

تذکر: الف: بازه‌های $[a,b],(a,b],[a,b),(a,b)$ کران دارند

ب: بازه‌های $(-\infty,+\infty),(-\infty,a),(a,+\infty)$ بی کران هستند

ج: نقطه میانی بازه (a,b) عبارتست از $\frac{a+b}{۲}$

مثال: جواب نامعادله‌های زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید و کران داری و بی کرانی بازه‌ها را مشخص کنید.

(تمرین کتاب درسی)

الف: $۳x+۵\leq ۸$

ب: $۵x-۳\leq ۷-۳x$

ج: $x^{۲}<۹$

د: $\frac{۱}{۲-x}<۳$

مثال: هر یک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد، این بازه را بنویسید. (تمرین کتاب درسی)

الف: $|x-2|\leq 2$

ب: $|2x+5|<1$

ج: $|2-\frac{x}{2}|<\frac{1}{2}$

مثال: اگر $I_n=(2-\frac{1}{n},4+\frac{1}{n})$ باشد $\prod_{n\in N} I_n$ را بیابید؟

مثال: اگر $A_n=[-\frac{3}{n},n+2]$، حاصل $(A_1\cup A_2)\cap A_3$ را بیابید؟

مثال: مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1}{10^2}>\frac{1}{x^2}$ را که در بازه $(3,+\infty)$ قرار می‌گیرند را بیابید. (تمرین کتاب درسی)

مثال: مجموعه $A=\left\{x-\frac{1}{a}[ax]:x\in R\right\}$ و $a>0$ را به صورت بازه $[b,\frac{2}{3})$ نوشته‌ایم حاصل $a+b$ را بیابید.

مثال: مجموعه جواب نامعادله $\frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}>1$ را به صورت بازه بنویسید؟

مثال: نقطه‌های میانی بازه $(-۲,a)$ و بازه مجموعه جواب نامعادله $\frac{\sqrt{x}(x+۳)}{x-۲}<۰$ یکسان است، a را بیابید؟

مثال: نشان دهید اگر $۰<a<۱$، آنگاه $۰<a^n<a$.

تست ۱: اگر $a<b$ باشد کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $a^۳-a+۱<b^۳-b+۱$ ۲) $a^۳+a+۱<b^۳+b+۱$ ۳) $a^۲+a<b^۲+b$ ۴) $a^۲-a<b^۲-b$

تست ۲: از نامساوی $۰<a<۱$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $\sqrt{a}<a$ ۲) $a^۹<a^{۱۰}$ ۳) $a^{۱۲}>a^{۱۳}$ ۴) $a^۵+a<a^۷+a$

تست ۳: اگر $a<b$ کدام نتیجه حاصل نمی‌شود $(a,b\neq ۰)$

۱) $\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۳]{b}$ ۲) $[a]\leq[b]$ ۳) $a^۳<b^۳$ ۴) $\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}$

تمرین: فرض کنیم؛ برای هر عدد مثبت h، $۰\leq a<h$. ثابت کنید $a=۰$ (تمرین کتاب درسی)

تمرین: نشان دهید برای هر n طبیعی و $x \geq -1$ آنگاه $(1+x)^n \geq 1+nx$ (تمرین کتاب درسی)

نکته: اگر $\varepsilon > 0$ و عدد حقیقی a داده شده باشند، عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $n\varepsilon > a$ (خاصیت ارشمیدس اعداد حقیقی)

مثال: نشان دهید اگر $\varepsilon > 0$ آنگاه عدد طبیعی مانند (n) وجود دارد که $\varepsilon > \frac{1}{n}$

مثال: اگر اعداد حقیقی a و b به ازای هر عدد حقیقی و مثبت ε در نامساوی $0 \leq a^2 + b^2 - 2b + 1 < \varepsilon$ صدق کنند حاصل $a^3 + b^3$ را بیابید؟

مثال: مقادیر x و y را بیابید، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \leq 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 < \varepsilon$

مثال: اگر برای هر n طبیعی داشته باشیم $1 \leq 3x < 1 + \frac{1}{n}$ و برای هر عدد حقیقی مثبت δ بتوان نوشت $-1 \leq y^2 + 2y < \delta - 1$، حاصل $x - y$ را بیابید؟

مثال: اگر برای هر عدد حقیقی $h > 0$ داشته باشیم $1 \leq x + \frac{1}{x} < 1 + h$، چند مقدار حقیقی x در این رابطه صدق می‌کند.

※ اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le x^4 - |x| - 2 < \varepsilon$، مجموعه مقادیر (x) چند عضو دارد؟

※ اگر برای هر n طبیعی بزرگتر از ۱ رابطه $[\frac{n^2+1}{n^2}] \le [2x]-[x] < \frac{n^2+1}{n^2}$ برقرار باشد حاصل $[2x+1]$ کدام است؟

تست ۱: به ازای چند مقدار برای $n \in N-\{1\}$، نامساوی $[\frac{5n^2+1}{n^2}] \le x+\frac{1}{x} < \frac{5n+1}{5n}$ برقرار است؟

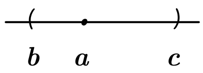
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

تست ۲: برای هر n طبیعی رابطه $0 \le 2^{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{6}}} - 4^{\sqrt{a+1}} < \frac{1}{n}$ برقرار است $a=?$

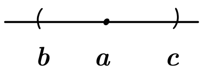
۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

همسایگی

الف: اگر $a \in (b,c)$ باشد (b,c) را یک همسایگی a می‌نامند

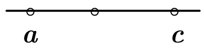


ب: اگر a وسط بازه (bx) باشد، همسایگی را متقارن گویند و در این حالت نصف بازه را شعاع همسایگی گویند.



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز بازه} = \frac{b+c}{2} \\ \text{شعاع بازه} = \frac{b-c}{2} \end{cases}$$

ج: اگر مرکز همسایگی را حذف کنیم، همسایگی را محذوف می‌نامند.



نکته: ۱) به مجموعه مقادیر x که در رابطه $|x-a|<r$ صدق نماید یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r گویند.

۲) به مجموعه مقادیرx که در رابطه $0<|x-a|<r$ صدق نمایند یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و شعاع r گویند.

۳) $(a,b)=\left\{x:|x-(\frac{a+b}{2})|<\frac{b-a}{2}\right\}$

مثال: همسایگی به مرکز $-\frac{5}{3}$ و شعاع $\frac{17}{6}$ شامل چند عدد صحیح است؟

مثال: اگر مجموع جواب $x^2+3x-4<0$ بازه‌ای به مرکز α و شعاع β باشد حاصل $\alpha\beta$ را بیابید؟

مثال: اشتراک دو بازه $(-3,2)$ و $(-1,4)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته مرکز و شعاع آن را بیابید؟

مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x-2|<\sqrt{x}$ را به شکل بازه متقارن $(a-\delta,a+\delta)$ نمایش داده‌ایم δ,a را بیابید.

تست ۱: اگر $(2a-4,a+2)$ یک همسایگی متقارن ۵ باشد شعاع همسایگی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۲: بازه $(\frac{2a+b}{3},\frac{a+5b}{3})$ یک همسایگی متقارن ۲ به شعاع $\frac{1}{3}$ است $a+b=?$

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

تست ۳: تابع $f(n)=\frac{۲^{n+۱}-۱}{۲^{n}+۲}$ با دامنه N مفروض است کمترین مقدار n برای آن که $f(n)$ در همسایگی ۲ به شعاع $\frac{۱}{۱۰۰}$ قرار داشته باشد چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

تست ۴: همسایگی محذوف متقارن a به شعاع r را به کدام صورت می‌توان نمایش داد.

۱) $۰<|x-a|<r$ ۲) $\frac{۱}{|x-a|}>\frac{۱}{r}$ ۳) $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ ۴) همه موارد

تست ۵: $I_۱$ یک همسایگی متقارن ۳ به شعاع $\frac{۳}{۲}$ و $I_۲$ یک همسایگی متقارن محذوف $-\frac{۳}{۲}$ به شعاع r باشد، اگر $I_۱ nI_۲=\phi$، حداکثر r کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

تست ۶: اگر $A=\left\{x\in R:\frac{۲x+۱}{x-۲}<۰\right\}$ آنگاه کوچکترین همسایگی متقارن به مرکز ۱ شامل همه اعضای A چه طولی خواهد داشت؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

قدر مطلق

هرگاه $x\in R$، قدرمطلق x عبارت است از $|x|=\sqrt{x^۲}=\begin{cases}x: & \text{اگر } x\geq ۰\\ -x: & \text{اگر } x<۰\end{cases}$ بنابراین ویژگی‌های قدرمطلق عبارتند از:

۱) $\forall x\in R:|-x|=x$

۲) $\forall x\in R:-|x|\leq x\leq |x|$

۳) $\forall x\in R,a\geq ۰:|x|=a\leftrightarrow x=\pm a$

۴) $\forall x\in \boldsymbol{R}, n\in \boldsymbol{N}\ |x^n|=|x|^n$

۵) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |x-y|=|y-x|$

۶) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: x^{2n}=y^{2n} \leftrightarrow |x|=|y|$

۷) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |xy|=|x||y|$

۸) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$

۹) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |x+y|\leq|x|+|y|$

۱۰) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |x-y|\leq|x|-y|\geq|x|-|y|$

۱۱) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |x_1x_2...x_n|=|x_1||x_2|...|x_n|$

۱۲) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: |x_1+x_2+...+x_n|\leq|x_1|+|x_2|+...+|x_n|$

۱۳) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: a>0 : |x|\leq a \leftrightarrow -a\leq x\leq a$

۱۴) $\forall x,y\in \boldsymbol{R}: a>0 : |x|\geq a \leftrightarrow x\geq a$ یا $x\leq -a$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x-3|\geq|x-1|$ شامل چند عدد صحیح است؟

مثال: جواب نامعادله $|x^3+x-4|<|x|^3+|x-4|$ را بیابید؟

مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x^3-1|\leq x^2+x+1$ را بیابید؟

مثال: اگر $a<0<b$ و $a^2<b^2$ حاصل $A=\frac{|a+b|-|a-b|}{|a^2-b^2|-|a^2+b^2|}$ را بیابید؟

تست ۱: اگر $۳x^۲-۲x-۱<۰$ آنگاه عبارت $|x-۱|-|۳x+۱|$ در بازه (a,b) قرار می‌گیرند، $\max(b-a)=?$

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳}$

تست ۲: اگر $|\alpha|<\frac{\pi}{۴}$ باشد ساده شده عبارت $A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos ۲a}}$ کدام است؟

۱) $۲\cos\alpha$ ۲) $۲\cos\frac{\alpha}{۲}$ ۳) $۳\cos\alpha-۱$ ۴) $۳\cos\frac{\alpha}{۲}-۱$

تست ۳: اگر مجموعه جواب معادله $\sqrt{x+۲+۲\sqrt{x+۱}}+\sqrt{x+۲-۲\sqrt{x+۱}}=۲$ بازه $[a,b]$ باشد حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

تست ۴: معادله $||۳\sin x-۱||=۱$ در بازه $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

تست ۵: رابطه $y=۳x+۲+|۴x-۱۰|$:

۱) تابعی است نزولی ۲) تابعی صعودی ۳) تابع نیست ۴) تابعی غیریکنواست

نکته:

$$۱)\quad \max\{a,b\}=\begin{cases} a & a\ge b \\ b & b\ge a\end{cases} \qquad a,b\in R$$

$$۲)\quad \min\{a,b\}=\begin{cases} a & a\le b \\ b & b\le a\end{cases} \qquad a,b\in R$$

$$۳)\quad \max\{a,b\}=\frac{a+b}{۲}+|\frac{a-b}{۲}| \qquad a,b\in R$$

$$۴)\quad \min\{a,b\}=\frac{a+b}{۲}-|\frac{a-b}{۲}| \qquad a,b\in R$$

$$۵)\quad |x|=\max\{-x,x\}$$

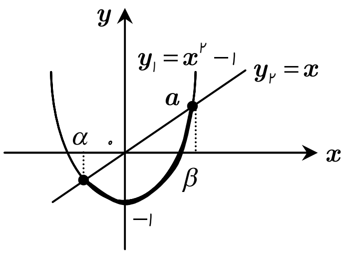
$$۶)\quad -|x|=\min\{-x,x\}$$

$$۷)\quad \max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b : a,b\in R$$

$$۸)\quad |x|<\max\{|a|,|b|\} : a<x<b$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\min\{x^۲-۱,x\}$، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند.

حل: ابتدا نمودارهای $y_۱=x^۲-۱$ و $y_۲=x$ را رسم می‌کنیم.



طبق شکل، مشخص است که در مسیر (α,β)، نمودار $y_۱$ پایین‌تر از نمودار $y_۲$ است بنابراین f، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال، مجموع ریشه‌های معادله $\max\{۲x-۲,x^۲-x\}=x+۱$ را بیابید

مثال: معادله $\max\{۰,۳x\}+\min\{x,۲+x\}=۲$ چند جواب دارد؟

تست ۱: معادله: $\min\{x^۲,۲-x^۲\}=\frac{۱}{۲}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۲: فرض کنید $a=۲x^۲-x+\frac{۵}{۴}$ و $b=۳x-\frac{۳}{۴}$، حاصل عبارت $P=\sqrt{\min\{a,b\}+\max\{a,b\}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶x+\frac{۱}{۲}}$ ۲) $\sqrt{۴x^۲-۲x+\frac{۱}{۲}}$ ۳) $\frac{|x-۱|}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{|۲x+۱|}{\sqrt{۲}}$

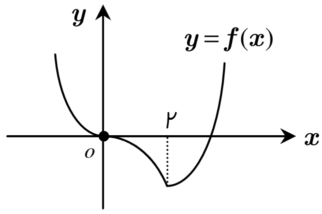
تذکر: در حالت کلی برای حل معادله یا نامعادله و رسم قدرمطلق‌ها، بایستی عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و سپس در هر ناحیه ایجاد شده تابع را رسم و معادله یا نامعادله را حل کنیم.

مثال: نمودار تابع $y=|x^۲-۲x|-۲x$ را رسم کنید؟

$x^۲-۲x=۰\to x=۰,۲\to$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$y=\begin{cases} x^۲-۴x & : \quad x<۰ \text{ یا } x>۲ \\ -x^۲ & : \quad ۰\le x\le ۲ \end{cases}$$



مثال: نمودار $y=|\cos x|-\cos x$ را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم کنید؟

مثال: نمودار $y=|x|-|x-۱|-۲x$ را رسم کنید؟

مثال: هرگاه $A=\{(x,y):|y-x|\le۲,|x|\le۲\}$ ، زیرمجموعه از $R^۲$ باشد، فاصله دورترین نقطه A از مبدأ مختصات را بیابید؟

تست ۱: مساحت یک چند ضلعی که از $|x|=۲$ و $|y-۱|=۱$ تشکیل می‌شود برابر است با:

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

تست ۲: مساحت محدود به نمودار $y=۳|x|+x-۴$ و محور x ها کدام است؟

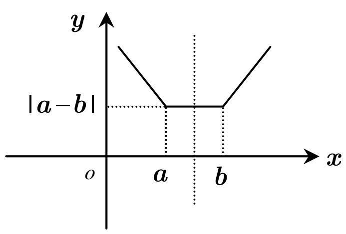
۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

تست ۳: مساحت ناحیه محدود به نمودار $y=۱-|۲x|$ و $y=-۳$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۸

رسم نمودار $y=|x-a|+|x-b|$

فرض می‌کنیم $a<b$ تابع را به صورت $y=\begin{cases}-۲x+(a+b):x<a\\ b-a:a\le x\le b\\ ۲x-(a+b):x>b\end{cases}$ نوشته سپس نمودار رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع داریم

۱) $y\ge|b-a|$

۲) $x=\frac{a+b}{۲}$: محور تقارن نمودار است.

۳) اگر a و b قرینه باشد آنگاه تابع زوج است.

۴) نقاط به طول a و b را نقاط گوشه (زاویه‌دار) منحنی گویند.

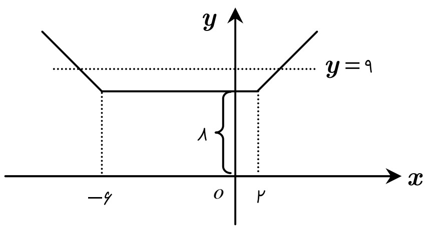
۵) در مورد تعداد ریشه‌های معادله $|x-a|+|x-b|=k$ به شکل زیر بحث می‌کنیم.

الف: اگر $k>|b-a|$ ← معادله دو جواب دارد $x_۱,x_۲=\frac{a+b\pm k}{۲}$

ب: اگر $k=|b-a|$ معادله بی شمار جواب دارد $\forall x\in[a,b]$

ج: اگر $k<|b-a|$ معادله جواب ندارد.

مثال: معادله $|x-۲|+|x+۶|=۹$ چند جواب دارد؟



حل: طبق شکل مشخص است که معادله ۲ جواب دارد.

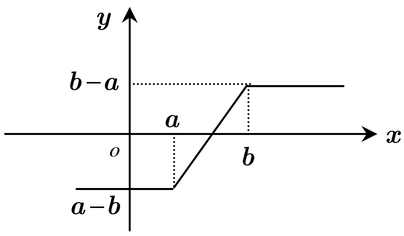
مثال: طول خط شکسته $y=|x-۱|+|x-۳|$ را در بازه $[۱,۵]$ بیابید؟

مثال: به ازای چه مقادیری از m معادله $|x-۳m+۱|+|x+۲m-۳|=۶$ جواب ندارد.

مثال: تعداد ریشه‌های $|x-۱|+|x-۳|=۳-x^۲$ را بیابید؟

$\boxed{\text{رسم نمودار } y=|x-\alpha|-|x-b|}$

فرض می‌کنیم $a<b$ بنابراین



$$f(x)=\begin{cases} a-b : x<a \\ ۲x-(a+b) : a\le x\le b \\ b-a : x>b \end{cases}$$

بنابراین:

۱) $-|b-a|\le y\le |b-۸|$

۲) اگر a و b قرینه باشند آنگاه تابع فرد است

۳) o نقاط $A\Big|_{.}^{a}$ و $B\Big|_{.}^{b}$ نقاط گوشه مخفی هستند

۴) $a<b$، تابع صعودی و اگر $a>b$، تابع نزولی است

۵) نقطه $W\Big|_{y=۰}^{x=\frac{a+b}{۲}}$، مرکز تقارن تابع است

۶) با توجه به شکل، در مورد تعداد جواب‌های معادله $|x-a|-|x-b|=k$، بر حسب مقادیر k بحث می‌کنیم

الف: $|k|>|a-b|$ باشد معادله جواب ندارد.

ب: $|k|=|a-b|$ معادله بی شمار جواب دارد.

ج: $|k|<|a-b|$ به معادله یک جواب دارد.

مثال: طول خط شکسته نمودار تابع $y=|2x+1|-|2x-1|$ در بازه $[-1,2]$ چقدر است؟

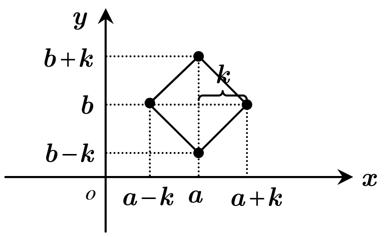
مثال: به ازای چه مقادیری از k، منحنی $y=k\sin x$، نمودار تابع $y=|x-1|-|x+3|$ را در بی شمار نقطه قطع می‌کند؟

مثال: مساحت محدود به نمودار $y=5-|x+2|-|x-1|$ و محور x ها کدام است؟

مثال: مجموعه جواب نامعادله $||x+2|+|x-3|+1|<5$ شامل چند عدد صحیح است؟

مثال: مقدار جواب‌های معادله $|x-2|-|x+1|=-x+1$ را بیابید؟

ⓘ **تذکر**: نمودار $|x|+|y|=k$ و $k>0$، نمودار این رابطه یک مربع به مرکز $(0,0)$ و قطر $2k$ است و برای رسم $|x-a|+|y-b|=k$ به نقطه (a,b)، مرکز مربع را مشخص و سپس به موازات محور محورها از دو طرف به اندازه k پیش می‌رویم تا چهار رأس مربع پیدا شود.



$$s=\frac{k^2}{|a||b|}$$ مربع

مثال: به ازای چه مقادیری از m خط $x=m$ نمودار $|x-2|+|y+3|=5$ را قطع نمی‌کند

دامنه رابطه: $2-5\le x\le 2+5\to -3\le x\le 7$

برد رابطه: $-3-5\le y\le -3+5\to -8\le y\le 2$

$\Rightarrow m\notin[-3,7]$

$\Rightarrow m<-3$ یا $m>7$

نکته: در حالت کلی برای رسم تابع $y=k_1|x-a_1|+k_2|x-a_2|+...+k_n|x-a_n|$، ابتدا نقاط به طول $x=a_1$ و $x=a_2,...,x=a_n$ را روی منحنی پیدا می‌کنیم و این نقاط را به هم وصل می‌کنیم، در پایان آخرین نقطه از سمت راست خطی باشیب $k_1+k_2+...+k_n$ و قبل از این نقطه خطی با شیب $-(k_1+k_2+...+k_n)$ رسم می‌کنیم که این تابع حتماً یا می‌نیمم یا ماکزیمم دارد که برابر با مقدار تابع در یکی از ریشه‌های آن است.

مثال: می‌نیمم $y=2|x|-|x+1|+|x-2|$ را بیابید؟

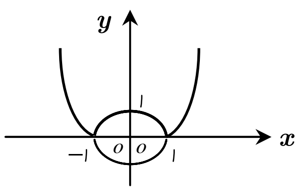
$x=0\to y=1, x=-1\Rightarrow y=5, x=3\to y=1\to \min y=1$

مثال: حداقل مقداری که عبارت $P=|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1|$ می‌تواند بپذیرد را پیدا کنید؟

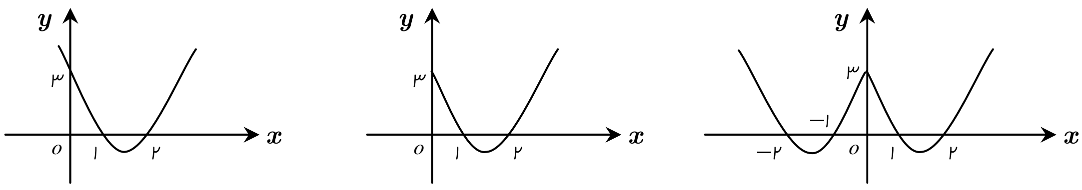
بررسی نمودارهای $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$

الف: برای رسم $y=|f(x)|$، ابتدا $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور x هاست را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

$y=|x^2-1|$

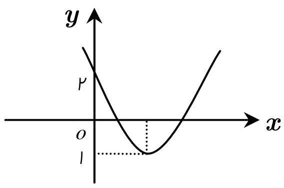


ب: برای رسم $y=f(|x|)$، ابتدا $y=f(x)$ را رسم، سپس آن قسمت از منحنی که به سمت چپ محور y ها است را حذف کرده و به جای آن قرینه سمت راست محور y ها را رسم می‌کنیم.



(۳) (۲) (۱)

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به صورت شکل مقابل است



الف: معادلات $|f(x)|=\frac{۳}{۲}$ و $|f(x)|=۱$ و $|f(x)|=۳$ چند ریشه دارند؟

ب: $f(|x|)=۱$ و $f(|x|)=۰$ و $f(|x|)=۱$ به ترتیب چند ریشه دارند؟

مثال: مساحت مساحت به نمودار $|x|+|y-۱|=۳$ را بیابید؟

مثال: برد توابع زیر را بیابید؟

الف: $y=\sqrt{|x-۱|-|x-۳|}$

ب: $y=\frac{۱}{|x-۱|+|x+۱|}$

ج: $y=\frac{۱}{|x-۱|-|x+۲|}$

د: $y=\frac{x}{|x|}+x$

مثال: چند نقطه روی محور x ها وجود دارد که مجموع فواصل هر کدام از آنها از نقاط به طول‌های ۱ و ۲ واقع بر این محور برابر ۲ باشد.

تست ۱: معادله $|x-17|=|2-x|+|2x-19|$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۸

تست ۲: مجموعه جواب نامعادله $x^2-|x|-2\leq 0$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[2,+\infty)$

تست ۳: نامعادله $|x^3+1|+|x-23|<|x^3+x-22|$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

تست ۴: معادله $\sin x=|x+1|+|x+2|$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

تست ۵: معادله $x^2+|x^2-24|=24$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بیشمار

تست ۶: معادله $|x^2-2|=mx$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بستگی به m دارد

تست ۷: حاصل $A=(\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}).\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ کدام است؟ سراسری ۹۳

۱) $\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) $1+\sqrt{3}$
۴) $2\sqrt{3}$

تست ۸: رابطه $R=\{(x,y):x,y\in Z,|x|+|y|=2\}$ چند زوج مرتب دارد؟

۱) ۸
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۴

تست ۹: نمودار تابع $y=4-|x|$ در بازه (a,b) بالاتر از خط $2y+x=5$ قرار دارد $\max(b-a)=?$

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

تست ۱۰: در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y=\sqrt{5+4x-x^2}$، در بالای نمودار تابع $y=|x-3|+2$ قرار دارد؟ (سراسری ۹۳)

۱) $(\frac{3-\sqrt{17}}{2},5)$
۲) $(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$
۳) $(2,\frac{4+\sqrt{15}}{2})$
۴) $(2,2+\sqrt{15})$

جزء صحیح

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را جزء صحیح x می‌نامیم.

$$[x]=\max\{n:n\in Z,n\le x\}$$

فرض کنید $[x]=n$ در این صورت $P=x-[x]$ را قسمت اعشاری x می‌نامند و $0\le p<1$ و در حالت کلی می‌توانیم هر عدد حقیقی را به صورت $x=n+P$ بنویسیم که در آن $n=[x]$ و $0\le P<1$.

مثال: با توجه به اینکه $(1+\sqrt{2})^8+(1-\sqrt{2})^8=1154$ حاصل $[(1+\sqrt{2})^8]$ را بیابید؟

حل: $0<-1<1-\sqrt{2}<0$ بنابراین $0<(1-\sqrt{2})^8<1$ یعنی

$$(1+\sqrt{2})^8=1154-(1-\sqrt{2})^8 \Rightarrow (1+\sqrt{2})^8=1154-\alpha : 0<\alpha<1 \Rightarrow [(1+\sqrt{2})^8]=1153$$

مثال: اگر $x+2[y]=13/7$ و $y+2[x]=11/4$ آنگاه حاصل $x+y$ را بیابید؟

مثال: با شرط طبیعی بودن n، حاصل $A=[\sqrt{n^2+2n}]+[\sqrt{4n^2+4n}]$ کدام است؟

مثال: حاصل $A=[(2+\sqrt{3})^3]$ را بیابید؟

خواص جزء صحیح

1) $[f(x)]\in Z$

2) $g_{(x)}=[f(x)]\Rightarrow D_g=D_f$

3) $[x]=n\rightarrow n\le x<n+1$

4) $x-1<[x]\le x$

5) $[x]\le x<[x]+1$

6) $0\le x-[x]<1$

7) $0\le f(x)-[f(x)]<1$

8) $[x+n]\Leftrightarrow [x]+n \quad n\in Z$

9) $[x+x]=2[x]\ ,\ [x-[x]]=0$

۱۰) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ : x\in Z \\ -۱ : x\notin Z \end{cases}$

۱۱) $[-x]=\begin{cases} -[x] & x\in Z \\ -[x]-۱ & x\notin Z \end{cases}$

۱۲) $[x+y]\geq[x]+[y]$

۱۳) $[x+y]=[x]+[y]+k : k=$ ۰ یا ۱

۱۴) $x\geq y\Rightarrow[x]\geq[y]$

۱۵) $[nx]=[x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+...+[x+\frac{n-۱}{n}] n\in N$

۱۶) $[nx]\geq n[x]$

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

الف: $f(x)=۲x-۶[\frac{x}{۳}]$

ب: $f(x)=\frac{x}{[x]}$

ج: $f(x)=[\frac{۴\cos x-۱}{\cos x+۲}]$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x)=\log[x]$

۲) $f(x)=\sqrt{x-[x^۲]}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $A=[[۲x]+x+۳]+[[-۲x]-x-۱]$

۲) اگر $x=\frac{۳}{۲}$ آنگاه حاصل $A=|[۳x]-|[۵x]||$ کدام است؟

✲ ۳) $A=[\tan^{-۱}\sqrt{۳}]+[\tan^{-۱}\sqrt{۴}]+[\tan^{-۱}\sqrt{۵}]+...+[\tan^{-۱}\sqrt{۱۳۹۳}]$

مثال: هر یک از معادلات زیر چند ریشه دارند؟

۱) $[\frac{x}{۴}]=\frac{x}{۵}$

۲) $x-۳[x]=۶$

۳) $۳x+۲=[۳x]-\sqrt{x+۱}$

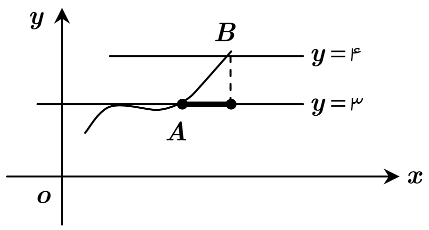
رسم نمودار $y=[f(x)]$

برای رسم این تابع از رابطه $n\le f(x)<n+۱$ که در این صورت $[f(x)]=n$، استفاده می‌کنیم بنابراین برای رسم این توابع

الف: $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم

ب: خطوط افقی و موازی $y=k$ را رسم می‌کنیم $(k\in Z)$

ج: آن قسمت از منحنی f که بین دو خط افقی $y=k$ و $y=k+۱$ قرار دارد را روی خط $y=k$ تصویر می‌کنیم به عنوان مثال در شکل زیر دو خط $y=۳$ و $y=۴$ منحنی f را در نقاط A و B قطع کرده است، تصویر f روی خط $y=۳$، همان پاره خط AB' است؟



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

۱) $f(x)=[۲x+۱]$ $\quad -۲<x<۳$

۲) $f(x)=[\cos ۲x]$ $\quad ۰\le x\le \pi$

۳) $f(x)=[\sqrt{x}]$ $\quad ۰\le x<۲۵$

۴) $f(x)=[x^۲]$ $\quad -۲\le x\le ۲$

مثال: سطح بین نمودار $S=\{(x,y):y=x-[x]\}$ و محور x ها در بازه $[0,6]$ را بیابید؟

مثال: مساحت پدید آمده از ناحیه $S=\{(x,y):[x^2+y^2]=4\}$ را بیابید؟

مثال: نمودار $y=x-[x]+\sin\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$ را در فاصله $[2,5]$ رسم کنید.

مثال: مساحت نمودار رابطه $S=\{(x,y):x,y\in R,[x][y]=1\}$ را بیابید؟

تست ۱: برد تابع $f(x)=x-[x+\frac{1}{2}]$ کدام است؟

۱) $y\geq\frac{1}{2}$ ۲) $0\leq y<\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}\leq y<\frac{1}{2}$ ۴) $0\leq y<1$

تست ۲: اگر $[x^2-4x]=[x^2-10x]=n$ آنگاه $[x^2-7x]$ برابر است با:

۱) $n+1$ ۲) $n-3$ ۳) $n+3$ ۴) n

تست ۳: مجموعه جواب معادله $[x+3[x]]=2[x-4]$ کدام است؟

۱) $\{-4\}$ ۲) $[-4,-3)$ ۳) $(-5,-4]$ ۴) $\{-3,-4\}$

تست ۴: مجموعه جواب معادله $[x]+[2x]=0$ کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,\frac{1}{2}]$ ۳) $\{0\}$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

تست ۵: معادله $[\frac{6}{x-1}]+[\frac{6}{1-x}]=0$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) بیشمار

تست ۶: نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ و $x\in[-2,3)$ از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟

۱) $(4,1)$ ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) $(1,5)$ ۴) $(5,\sqrt{2})$

تست ۷: معادله $[\sin x]=\frac{2x}{\pi}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

تست ۸: مجموعه جواب نامعادله $[x]+[2x]+[3x]\leq 0$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{2})$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-\infty,0]$ ۴) $(-\infty,\frac{1}{3})$

تست ۹: حاصل $A=[\sin 1^\circ]+[\sin 2^\circ]+...+[\sin 360^\circ]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۸۹ ۴) ۱۷۸-

* **تست** ۹: معادله $\frac{[x]}{|x|}=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{5}{2}$ با فرض $x\leq 2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

* **تست** ۱۰: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| : [x] \text{ زوج} \\ |x-[x+1]| : [x] \text{ فرد}\end{cases}$ ، معادله $nf(x)=1$ در بازه $[0,n]$ چند ریشه دارد؟ $n\in N-\{1\}$

۱) n ۲) $n-1$ ۳) $n-2$ ۴) $n-3$