فصل ۱ دنباله‌ها

۱) مفهوم دنباله	۲) نمایش دنباله
۳) انواع دنباله	۴) همگرائی دنباله
۵) قوانین محاسبه حد دنباله	۶) دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$
۷) قضیه فشردگی	۸) دنباله‌های کران دار
۹) دنباله‌های یکنوا	۱۰) مجموعه‌های کران دار
۱۱) اصل موضوع تمامیت	۱۲) قضیه وایرشتراس
۱۳) عدد نپر و حد دنباله $(1+\frac{1}{n})^n$	۱۴) دنباله حسابی
۱۵) دنباله هندسی	۱۶) دنباله هندسی
۱۷) بخش‌پذیری	

دنباله

دنباله تابعی است مثل a به صورت $a:N\to R$ تعریف می‌شود به عبارت بهتر دنباله تابعی است که دامنه آن اعداد طبیعی و هم دامنه آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد حقیقی است مثال:

۰/۳ و ۰/۳۳ و ۰/۳۳۳ و ۰/۳۳۳۳ و ...

$$a_1=0/3 \quad , \quad a_2=0/33 \quad , \quad a_3=0/333 \quad , \quad \ldots\ a_n=\underbrace{0/333\ldots3}_{n\ \text{بار}\ 3}$$

نمایش دنباله

اگر a تابع دنباله‌ای مورد نظر باشد آنگاه دنباله a به صورت a_n، $a_{(n)}$، $\{a_n\}$ یا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود و گاهی دنباله را به صورت رشته‌ای از اعداد نمایش می‌دهیم

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

$$1, 3, 9, 27, \ldots, n^3$$

مثال: مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله $a_n=\left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ را بیابید.

$$a_1=\left[\frac{(-1)^1}{1}\right]=1$$

$$a_۲=\left[\frac{(-۱)^۲}{۲}\right]=[\frac{۱}{۲}]=۰$$

$$a_۳=\left[\frac{(-۱)^۳}{۳}\right]=[-\frac{۱}{۳}]=-۱$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$-۱,۰,-۱,۰,-۱,...,-۱,۰...$$

$$S_{۱۰۰}=\underbrace{-۱+۰-۱+۰-...-۱+۰}_{\text{تا ۱۰۰}}=-۵۰$$

مثال: مجموع ۵ جمله دوم دنباله $a_n=(-۱)^{n!}+\cos n\pi$ کدام است؟

مثال: چه تعداد از جملات دنباله $\{۲n^۲-۲۳n+۵۶\}$ منفی است.

مثال: اولین جمله دنباله $a_n=\left\{\frac{۳n}{۳n^۲+۱}\right\}$ که کوچکتر از ۰/۱ می‌باشد را بیابید؟

مثال: جمله یازدهم دنباله ...,۰,۱,۳,۷,۱۵ کدام است؟

تذکر: دنباله را به دو صورت نمایش می‌دهند:

الف: نمایش محوری: در این روش، جمله‌های دنباله را روی یک محور نشان می‌دهند.

ب: نمایش دکارتی: در این روش، دنباله را همانند یک تابع در دستگاه مختصات دکارتی نمایش می‌دهند.

مثال: $a_n=\left\{\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$ را به صورت دو روش فوق نمایش دهید.

مثال: دنباله مربوط به کسر $\frac{۱}{۹}$ را بنویسید؟

تذکر: الف: اگر با یک توالی متناهی از اعداد سروکار داشته باشیم در این صورت این توالی را یک دنباله متناهی نامند، مانند $۲,۴,۶,...,۱۰۰$

ب: اگر با توالی نامتناهی از اعداد سروکار داشته باشیم یا وقتی از یک دنباله بدون قید نام به میان می‌آوریم، مرادمان یک دنباله نامتناهی است؟ مانند

$a:۵,۵,۵,...$ دنباله ثابت ۵

$a:۲,۴,۸,۱۶,...$

مثال: آیا دنباله‌ای با جمله عمومی $b_n=\left\{\frac{n^۲+۱}{n+۱}\right\}$ یک دنباله نامتناهی است چرا؟

مثال: آیا دنباله‌های $a_n=\sqrt{۴-n^۲}$ و $b_n=\log(۶-n)$ و $c_n=\sqrt{n-۱}-\sqrt{۲۰-n}$ متناهی‌اند چرا؟

انواع دنباله

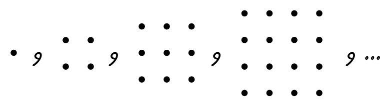
۱) دنباله ثابت: اگر هر جمله دنباله برابر با مقدار ثابت c باشد، را دنباله ثابت c می‌نامند

$c_n=\{c\}:c,c,c,...$

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر ثابت هستند با ذکر دلیل

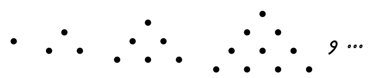
۱) $\left\{[\frac{n+۱}{n+۲}]\right\}$ ۲) $\{n\sin n\pi\}$ ۳) $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{۲}(۴n+۱)\right)\right\}$ ۴) $\left\{\left[(۲n)^{(-۱)^{۲n+۱}}\right]\right\}$

۲) دنباله اعداد مربعی:



مثال: در دنباله اعداد مربعی نسبت $\frac{a_7}{a_3}$ کدام است؟

۳) دنباله اعداد مثلثی:



مثال: در دنباله اعداد مثلثی، جمله بیستم دنباله از چند نقطه تشکیل شده است؟

۴) دنباله حسابی: هر دنباله به صورت $a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d$ یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d گویند.

مثال: کدام دنباله زیر دنباله حسابی است.

۱) $\left\{\frac{n-3}{2}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n-n^2}{4}\right\}$ ۳) $\left\{1+(\frac{1}{2})^n\right\}$ ۴) $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+2}\right\}$

۵) دنباله هندسی: هر دنباله به صورت $a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^{n-1}$ را یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q گویند.

مثال: $b_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$ چگونه دنباله‌ای است؟

۱) دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ ۲) دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$

۳) دنباله غیرمشخص ۴) دنباله صعودی

۶) دنباله بازگشتی (برگشتی): اگر بتوان بین جملات دنباله یک رابطه برقرار کرد. به این دسته‌ها از دنباله‌ها، دنباله‌های بازگشتی گویند و برای نمایش این دنباله حداقل می‌بایست ۲ جمله اول این دنباله‌ها را داشته باشیم، مانند دنباله‌های:

دنباله فیبوناتچی	$a_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_1 = a_2 = 1$

دنباله لوکاس	$L_n: 1,3,4,7,11,18,29,\dots$ $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n \quad , \quad L_1=1\ ,\ L_2=3$

مثال: در دنباله $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ با شرایط اولیه $a_1=a_2=1$، جمله دوازدهم چند برابر جمله چهارم است؟

۷) دنباله صعودی: دنباله a_n را صعودی گویند هرگاه هر جمله دنباله از جمله قبل از خودش بزرگتر یا مساوی باشد. $\forall n\in N: a_{n+1}\ge a_n$

مثال: $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله صعودی است زیرا

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n^2+3n+2}>0$$

مثال: دنباله $a_n=\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}$ از جمله چندم به بعد صعودی است.

۸) دنباله نزولی: دنباله a_n را نزولی گویند هرگاه هر جمله دنباله از جمله قبل از خودش کوچکتر یا مساوی باشد $(\forall n\in N: a_{n+1}\le a_n)$

$$a: 2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots$$

مثال: در یک دنباله $a_1=2$ و $na_n=(2n+1)a_{n+1}$، در این صورت آیا $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی است چرا؟

۹) دنباله نوسانی: اگر جملات یک دنباله همگی یک در میان مثبت و منفی باشند، دنباله را نوسانی گویند مانند

$$a_n=(-1)^n=\cos n\pi=\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=\tan(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$$

تذکر: دنباله ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

تذکر: دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، دنباله یکنوا گویند.

تذکر: دنباله‌ای صعودی یا نزولی نباشد، غیریکنوا گویند.

مثال: چه تعداد از جملات زیر صحیح است (با ذکر دلیل)

الف: هرگاه n جمله نخست از یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

ب: هرگاه $\{an\}$ دنباله صعودی و c عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.

ج: هرگاه $\{a_n\}$ دنباله نزولی و c عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز نزولی است.

د: هرگاه $\{a_n\}$ دنباله یکنوا و c عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز یکنواست.

مثال: چه تعداد از دنباله‌های $\left\{\cos\frac{\pi}{2^n}\right\}$ و $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ و $\left\{1+(\frac{1}{3})^n\right\}$ و $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ نزولی هستند (با ذکر دلیل)

مثال: دنباله $a_n=\left\{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}$ چه دنباله‌ای است.

مثال: نشان دهید که هیچ کدام از دو جمله دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر نیستند؟

مثال: الف: دو عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

ب: دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۱۰) دنباله کران دار: دنباله $\{a_n\}$ بر مجموعه ناتهی (A) کران دار گویند هرگاه عددی مثبت مانند u یافت شود به طوری که برای هر $x\in A$:

$-u\leq f(x)\leq u$

مثال: دنباله $a_n=\{(-1)^n\}$, $b_n=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ و $c_n=\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ دنباله‌های کران دار هستند.

تذکر: دنباله $\{a_n\}$ را کران دار گویند هرگاه هم از بالا و هم از پایین کران دار باشد.

مثال: دنباله $\left\{(1+\frac{1}{n+1})\cos\frac{n}{n+1}\right\}$ یک دنباله کران دار است.

حل:

$$a_n=\left\{(\frac{n+2}{n+1})\cos\frac{n}{n+1}\right\}\overset{n\in N}{\Rightarrow}1<\frac{n+2}{n+1}\leq\frac{3}{2}$$

$$\forall n\in N:\frac{1}{2}\leq\frac{n}{n+1}<1\rightarrow 0<\cos\frac{n}{n+1}<1$$

$$\rightarrow 0<\frac{n+2}{n+1}\cos\frac{n}{n+1}<\frac{3}{2}\rightarrow \underset{\text{کران پایین}}{\underset{\downarrow}{0}}<a_n<\underset{\text{کران بالا}}{\underset{\downarrow}{\frac{3}{2}}}$$

مثال: یک دنباله نوسانی تعریف کنید که کران دار باشد، دو دنباله نوسانی تعریف کنید که کران دار نباشد.

مثال: ثابت کنید هرگاه $\{a_n\}$ کران دار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که برای هر n؛ $|a_n|\leq M$ و بالعکس.

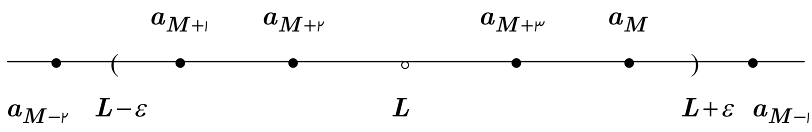
مثال: یک دنباله بسازید که هم کران دار و هم نزولی باشد.

همگرایی دنباله

دنباله $\{a_n\}$ را به عدد حقیقی L همگرا گوییم هرگاه برای هر همسایگی متقارن L به شعاع دلخواه ε عدد طبیعی مانند M یافت شود که تمام جملات دنباله از شماره M به بعد، درون این همسایگی جای گیرند به زبان ریاضی a_n را به L همگرا گوییم هرگاه:

$$*\ ;\ \forall\varepsilon>0\ \exists M\in N:n\geq M\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$$

در این صورت گوییم حد a_n برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$، دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا گوییم.



هدف از اثبات وجود حد یک دنباله پیدا کردن M ای وابسته به ε است که در شرط ∗ صدق کند و معمولاً هر چه ε را کوچکتر انتخاب کنند، مقدار M بزرگتر می‌شود.

مثال: برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید، n از چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0/0001$ برقرار باشد.

$n=1 \rightarrow |a_n-2|=1 \qquad n=2 \rightarrow |a_n-2|=\left|\frac{4}{3}-2\right|=\frac{2}{3}$

$n=3 \rightarrow |a_n-2|=\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{1}{2}\ ,\ n=4 \Rightarrow |a_n-2|=\left|\frac{8}{5}-2\right|=\frac{2}{5}$

با توجه به جملات نوشته شده، مشخص است که با افزایش n، فاصله $\{a_n\}$ با ۲ به عدد صفر نزدیک می‌شود.

$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\frac{1}{10000} \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right|<\frac{1}{10000} \Rightarrow n+1>10000$

$\rightarrow n>9999$

مثال: کدام یک از جملات دنباله $a_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n+1}$ در همسایگی ۲ به شعاع $\frac{1}{100}$ قرار دارند؟

مثال: نشان دهید دنباله‌های $a_n=\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}$ و $b_n=\left\{3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ به عدد ۳ همگرا هستند.

مثال: اگر $n\geq M$ آنگاه جملات دنباله $\left\{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right\}$ در همسایگی ۲ به شعاع ε قرار دارند، حداقل مقدار M را بیابید؟

مثال: ابتدا حد دنباله $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

مثال: اگر L حد دنباله $a_n=\frac{3n-2}{2n+1}$ باشد تعیین کنید چند جمله از این دنباله در نامساوی $|a_n-L|<\frac{1}{20}$ صدق نمی‌کنند.

مثال: در دنباله $a_n=\left\{\frac{4n+1}{2n+5}\right\}$، کمترین مقدار طبیعی n که به ازای آن رابطه $1/999<a_n<2/001$ برقرار باشد به دست آورید.
(هماهنگ کشوری ۸۸)

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید.

الف: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+5}=3$

ب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$

تست ۱: اگر $n\geq M$ آنگاه جملات دنباله $a_n=\frac{1}{n^2+4n}$ در همسایگی صفر به شعاع $\frac{1}{100}$ قرار می‌گیرند حداقل M کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۹

تست ۲: چه تعداد از جملات دنباله $\left\{\frac{5n^2}{n^2+2}\right\}$ در همسایگی ۵ به شعاع $\frac{1}{20}$ قرار ندارند؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

تست ۳: جملات دنباله $\left\{\frac{n^{2}-16}{n^{2}-41}\right\}$ برای مقادیر $n>71$ در کدام بازه قرار دارند؟ (سنجش خرداد ۹۳)

۱) (۱/۰۰۵ و ۰/۹۹۵) ۲) (۱/۰۰۵ و ۱) ۳) (۱/۰۱ و ۰/۹۹) ۴) (۱/۰۱ و ۱)

تست ۴: به ازای مقادیر $n \geq n_{0}$ اگر فاصله نقاط نظیر دنباله $\left\{\frac{4n+1}{3n-2}\right\}$ از نقطه همگرایی خود، کمتر از ۰/۰۲ باشد کوچکترین مقدار n_{0} کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

تست ۵: اگر $a_n=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & : \quad n=2k \\ \frac{n+4}{n} & : \quad n=2k+1\end{cases}$، کوچکترین مقدار n_{0} که به ازای هر $n \geq n_{0}$، a_n در همسایگی یک به شعاع ۰/۰۱ قرار می‌گیرد کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۴۰۱ ۴) ۹۹

تست ۶: در دنباله $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots,a_n$، مجموع ۱۰۰ جمله اول کدام است؟

۱) a_{101} ۲) $1+a_{101}$ ۳) a_{102} ۴) $a_{102}-1$

تست ۷: اگر $a_n=\frac{n+1}{2n+1}$ و $b_n=\frac{n-1}{n+1}$، برد دنباله $\{[a_n]+[b_n]\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۸: چند جمله از جملات دنباله $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\}$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل برابر ۶ شود.

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۵۰

تست ۹: در دنباله $a_n=\left\{[\frac{3n}{n+1}]\right\}$، مجموع ۹ جمله اول دنباله چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

تست ۱۰: دنباله a_n با جمله عمومی $a_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})...(1-\frac{1}{n^2})$ به ازای $n\geq 2$ مفروض است، کدام دنباله با دنباله a_n به ازای $n\geq 2$ برابر است؟

۱) $\frac{n+1}{2n}$ ۲) $\frac{n^2+1}{n^2}$ ۳) $\frac{n+1}{n}$ ۴) $\frac{2n-1}{n^2}$

تست ۱۱: حاصلضرب n جمله اول دنباله $\{a_n\}$ از رابطه $P_n=n^3$ به دست می‌آید، جمله عمومی دنباله کدام است؟

۱) $a_n=\frac{n^3}{(n-1)^3}$ ۲) $a_n=\frac{n^2}{(n+1)^3}$ ۳) $a_n=\frac{n^3}{n+1}$ ۴) $a_n=\frac{n^2}{(n-1)^3}$

تست ۱۲: مجموع n جمله اول یک دنباله عددی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هیجدهم کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)

۱) ۹ ۲) $\frac{39}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

تست ۱۳: در تعریف حد برای جملات دنباله $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$ اگر $\varepsilon=10^{-6}$، $\min M=?$ $(\frac{1}{\log 2}=3/32)$

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸۱

تست ۱۴: در تعریف حد دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{2n+(-1)^n}{n+1}$ اگر برای $n\geq n_0$، جملات دنباله تا حد آن فاصله‌ای کمتر از $\frac{1}{25}$ داشته باشند $\min(n_0)=?$

تست ۱۵: چه تعداد از جملات دنباله $a_n=\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^n}$ در همسایگی حد آن به شعاع $\frac{1}{1000}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) بی شمار

قوانین محاسبه حد دنباله‌ها

۱) حد یک دنباله همگرا منحصر به فرد است.

۲) اگر $\{a_n\}$ دنباله ثابت با مقدار c باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=c$

مثال: دنباله $a_n=\cos^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}$ یک دنباله ثابت (۱) است که همگرا به (۱) است.

۳) حذف یا اضافه کردن تعداد متناهی جمله به یک دنباله، وضعیت همگرایی آن یا مقدار حد آن تغییر نمی‌کند.

مثال: $a_n=\begin{cases}2^{-n+1} & n>100\\ \frac{n+3}{2n+1} & n\leq 100\end{cases}$ همگرا به چه عددی است.

حل: با توجه به نکته اشاره شده می‌توانیم ۱۰۰ جمله اول دنباله را حذف کنیم بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} 2^{-n+1}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2^n})(\frac{1}{2})=(\frac{1}{+\infty})(\frac{1}{2})=0(\frac{1}{2})=0$$

۴) اگر $\{a_n\}$ همگرا به L باشد و $a_n \geq 0$ آنگاه $L \geq 0$ ولی عکس مطلب درست نیست. به عنوان مثال: دنباله $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ به صفر همگراست ولی a_n دارای جملات منفی هم است.

۵) اگر $|c|<1$، آنگاه دنباله $\{c^n\}$ همگرا به صفر است ولی اگر $|c|>1$ آنگاه $\{c^n\}$ واگرا است. و در حالت $c=1$ دنباله همگرا به (۱) و در حالت $c=-1$ دنباله واگراست.

مثال: دنباله‌های $\left\{(-\frac{1}{3})^n\right\}$ و $\left\{(\tan\frac{\pi}{6})^n\right\}$ و $\left\{(\sin\frac{\pi}{3})^n\right\}$ همگی همگرا به صفرند ولی دنباله‌های $\left\{(\tan\frac{\pi}{3})^n\right\}$ و $\left\{(\cot\frac{\pi}{8})^n\right\}$ و $\left\{7^{\frac{2n}{3}}\right\}$ همگی واگرا هستند.

مثال: اگر دنباله $a_n=(\frac{3x+1}{x-1})^n$ همگرا باشد حدود x را بیابید.

مثال: حد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

۱) $\left\{n^{(-1)^{2n+1}}\right\}$ ۲) $\left\{\cos(\frac{n\pi}{2})\right\}$ ۳) $\left\{\left[3+\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ ۴) $\left\{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$

۶) هر زیر دنباله‌ای از یک دنباله همگرا خودش دنباله همگراست و همان حد دنباله اصلی را دارد

(منظور از زیر دنباله: دنباله جدیدی با نامتناهی عضو است که از حذف تعدادی (متناهی یا نامتناهی) جمله دنباله اولیه حاصل می‌شود.)

مثال: اگر جملات با شماره زوج را در یک دنباله در نظر بگیریم، یک زیر دنباله حاصل می‌شود.

۷) اگر دنباله‌ای دارای دو زیردنباله با حدهای متفاوت باشد قطعاً دنباله واگراست.

(دنباله‌ای که همگرا نباشد، واگراست)

مثال: آیا دنباله $a_n=\frac{2^{2[\frac{n}{2}]}}{2^{n+1}}$ واگراست چرا؟

حل: اگر نشان دهیم دنباله دارای ۲ زیر دنباله با حدهای متفاوت است، دنباله همگرا نخواهد بود:

$$\text{زوج } n \Rightarrow a_n=\frac{2^{2(\frac{n}{2})}}{2^{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{2^n}{2^n(2)}=\frac{1}{2}$$

$$\text{فرد } n \Rightarrow a_n=\frac{2^{2(\frac{n-1}{2})}}{2^{n+1}}=\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{2^n(\frac{1}{2})}{2^n(2)}=\frac{1}{4}$$

۸) اگر دو دنباله a_n و b_n به جز M جمله اول در بقیه جملات با هم برابر باشند آنگاه دارای حد یکسانی خواهند بود (یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا خواهند بود)

مثال:

همگرا به صفر است $1,2,4,6,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},...$

همگرا به صفر است $-1,-5,-3,-2,-1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},...$

یعنی دو دنباله از جمله ۶ ام به بعد دارای رفتار یکسان و هر دو همگرا به صفرند.

۹) اگر a_n همگرا به L باشد آنگاه a_{n+1} و a_{n-1} نیز همگرا به L می‌باشند یعنی $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}$ و اگر a_n همگرا باشد در حالت کلی برای هر عدد ثابت و صحیح K رابطه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+k}=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ برقرار است.

مثال: دنباله‌های $\left\{(\frac{1}{3})^{n-1}\right\}$ و $\left\{(\frac{1}{3})^{n}\right\}$ و $\left\{(\frac{1}{3})^{n+4}\right\}$ همگی همگرا به صفرند.

۱۰) اعمال بین دنباله‌ها: اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=L_2$ آنگاه:

الف: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\pm b_n)=L_1\pm L_2$

ب: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n.b_n)=L_1.L_2$

ج: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{L_1}{L_2}\ (L_2\neq 0)$

د: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{L_1}\ ,\ L_1\neq 0$

هـ: $\lim\limits_{n\to+\infty} Ka_n=KL_1$

ز: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{L_1}$ (اگر $L_1<0$ می‌بایست K فرد باشد)

مثال: دنباله همگرای a_n در شرایط $a_1=\sqrt{2}$ و $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ صدق می‌کند در این صورت a_n همگرا به چه عددی است؟

حل: فرض می‌کنیم این دنباله همگرا به L باشد بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+a_n}\Rightarrow L=\sqrt{2+L}\Rightarrow L^2=2+L\Rightarrow L^2-L-2=0\to(L-2)(L+1)=0\Rightarrow L=2,L=-1$$

چون جمله اول دنباله برابر با $\sqrt{2}$ و دنباله روند افزایشی دارد پس $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=2$ می‌باشد.

مثال: فرض کنید $a_{n+2}=a_{n+1}+a_{n+2}$ و $a_1=a_2=1$ در این صورت نشان دهید $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۱۱) تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ آنگاه دنباله $a_n=f(n)$ نیز به L همگراست به شرطی که $N\subset D_f$ باشد.

به عنوان مثال تابع $y=\frac{3x+2}{x+1}$ وقتی $x\to+\infty$ دارای حدی برابر با (۳) است بنابراین دنباله $a_n=\frac{3n+2}{n+1}$ به ۳ همگراست و یا در تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+5}}$ وقتی $x\to+\infty$ دارای حدی برابر با $+\infty$ است پس دنباله $a_n=\frac{n}{\sqrt{n+5}}$ نیز واگرا خواهد بود. $(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+5}}=+\infty)$

دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم بندی کرد.

الف: دنباله‌هایی که حد آنها منحصر به فرد نسبت مانند $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$

ب: دنباله‌هایی که حد آنها برابر با $\pm\infty$ است مانند $\{\sqrt{n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}$ واگرا به $+\infty$ است هرگاه:

$$\forall k>0\ \exists M\in N: n\geq M\to a_n>k$$

مثال: دنباله‌های $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ و $\left\{\frac{1}{10^6}(n+1)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ واگرا به $+\infty$ می‌باشند.

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}$ واگرا به $(-\infty)$ است هرگاه:

$$\forall k<0\ \exists M\in N: n\geq M\to a_n<k$$

مثال: دنباله $\{-\sqrt{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ و $\left\{\frac{1-n^2}{n+5}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ واگرا به $-\infty$ می‌باشند.

مثال: نشان دهید $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$

حل: فرض می‌کنیم $k>0$ باید نشان دهیم از شماره‌ای به بعد $n^3>k$ پس شماره‌ای مانند M است هرگاه $n\geq M$، $n^3>k$ در اینجا k معلوم مسأله است.

$$n^3>k\to n>\sqrt[3]{k}\Rightarrow M=[\sqrt[3]{k}]+1$$

مثال: به کمک تعریف نشان دهید دنباله $\{\sqrt{n-1}\}$ همگرا به $+\infty$ است. (امتحان نهایی ۹۲)

مثال: ثابت کنید $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n}=+\infty$

مثال: ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

مثال: ثابت کنید دنباله با جمله عمومی $a_n = n^3 + 2$ واگرا به $+\infty$ است.

نکته:

الف: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an^k + bn^{k-1} + \dots}{a'n^{k'} + b'n^{k'-1} + \dots} \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } k = k' \text{ آنگاه } \text{حد} = \frac{a}{a'} \\ \text{اگر } k > k' \text{ آنگاه } \text{حد} = \pm\infty \\ \text{اگر } k < k' \text{ آنگاه } \text{حد} = 0 \end{cases}$

ب: اگر $a > b > 1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n$

ج: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_{n1}^k + bn^{k-1} + \dots} = \lim \sqrt[k]{a}\,(n + \frac{b}{ak})$ ؛ (اگر a منفی باشد k نمی‌تواند زوج باشد)

مثال:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n + 8^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{8^n} = 8$$

$$2)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^{3n} + 6^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{27^n + 36^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{36^n} = 36$$

$$3)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 + 2n + 1}{n^3 + 7n + 6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(5 + \cancelto{0}{\frac{2}{n^2}} + \cancelto{0}{\frac{1}{a^3}})}{n^3(1 + \cancelto{0}{\frac{7}{n^2}} + \cancelto{0}{\frac{6}{n^3}})} = 5$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + 5}{n + 2} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

مثال: حد دنباله‌های زیر را بیابید.

$$1)\ a_n = \{\cos(n^2 + n)\pi\}$$

۲) $a_n=\left\{\frac{۲^n+۱}{۲^{n+۱}-۲}\right\}$

۳) $a_n=\left\{۲n-\sqrt{۴n^۲+n}\right\}$

۴) $a_n=\left\{\sqrt[n]{۳^n+۲^n+۱}\right\}$

۵) $a_n=\left\{\frac{۱}{n-\sqrt{n^۲+n}}\right\}$

نکته: اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=۰$ آنگاه به جای توابع $\sin a_n$، $\tan a_n$، $\sin^{-۱} a_n$ و $\tan^{-۱} a_n$ در محاسبه حد می‌توان a_n را جایگزین کرد (به شرطی که عبارت‌هایی مانند $(\tan a_n-\sin a_n\,,\ \tan an-an\,,\ \sin a_n-a_n)$ را نداشته باشیم.

مثال: دنباله $a_n=\left\{۴n\sin\frac{۵}{n}\right\}$ همگرا به چه عددی است.

مثال: دنباله $\left\{\frac{n^۳}{۳n-۱}\sin\frac{\pi}{n^۲}\right\}$ به کدام عدد همگراست.

مثال: دنباله $a_n=\left\{\left[۳n\sin\frac{۴}{۳n}\right]\right\}$ همگرا به چه عددی است.

مثال: حاصل همگرایی دنباله‌های زیر را بیابید؟

۱) $a_n=\left\{\dfrac{n^{۲}\tan^{-۱}n}{۳n^{۲}+n}\right\}$

۲) $b_n=\left\{\sin^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}\cos\dfrac{۱}{n}\right)\right\}$

۳) $c_n=\left\{\tan^{-۱}\left(\dfrac{n-۱}{۳n+۱}\right)\right\}$

۴) $d_n=\left\{\sin\left(\dfrac{n!}{۲}\right)\left[\dfrac{n+۱}{n+۳}\right]\right\}$

۵) $e_n=\left\{\left(\dfrac{۲n+۱}{n+۲}\right)\cos\dfrac{\pi}{n+۳}\right\}$

مثال: اگر دنباله $\left\{\sqrt{۲n+k\sqrt{۲n+۳}}-\sqrt{۲n+۱}\right\}$ همگرا به ۲ باشد $k=?$

مثال: دنباله $a_n=\left\{\sqrt[۳]{n^{۳}+۶n^{۲}+۸n+۱}-n\right\}$ همگرا به چه عددی است.

مثال: دنباله $\left\{\sqrt{n^{۴}+n}-\sqrt{n^{۴}+n^{۲}}\right\}$ همگرا به چه عددی است.

نکته: سرعت میل به سمت بی نهایت بعضی از توابع از نظر مقایسه‌ای به صورت زیر است.

$$n\to+\infty:\ln_a n<\log_a n<n^k<a^n<n!<n^n\quad(a>۱,k\geq۱)$$

مثال: حاصل همگرایی دنباله‌های زیر را بیابید. (در صورت وجود)

۱) $a_n = \dfrac{\log(8^n + 1)}{\log(2^n + 1)}$

۲) $a_n = \dfrac{\log(n^5 + 1)}{\log(n^3 + 1)}$

۳) $a_n = \left\{ \log_{0/6}(\cos \dfrac{\pi}{n+2}) \right\}$

۴) $a_n = \left\{ \log_2(16n^2 + 3n + 1) - 2\log_2(2n+1) \right\}$

۵) $a_n = \{ \log_n \}$

۶) $\left\{ \log \dfrac{1}{n} \right\}$

۷) $a_n = \left\{ \dfrac{4^n + \log n - n^2}{3^n + n! + 2^n} \right\}$

۸) $a_n = \left\{ (1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{9})(1+\dfrac{1}{81})\dots(1+\dfrac{1}{3^{2^n}}) \right\}$

۹) $a_n = \left\{ (3^{2n} + 2^{2n} + 5^n)^{\frac{1}{n}} \right\}$

۱۰) $a_n = \left\{ \dfrac{2^n + 2^{2n+1}}{3^n + 4^n} \right\}$

۱۱) $a_n = \left\{ \dfrac{e^{n+2} - \pi^{n-1}}{e^{n+1} + \pi^{n+1}} \right\}$

۱۲) $a_n = \left\{ [\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}] \right\}$

۱۳) $b_n = \left\{ \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{n-1}} \right\}$ $\qquad 0 < a < 1$

نکته: اگر n عدد طبیعی باشد همواره روابط زیر برقرارند.

$$۱)\ ۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۲)\ ۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^{۲}$$

$$۳)\ ۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$$

$$۴)\ ۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+...+n^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$۵)\ ۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+...+n^{۳}=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲}$$

$$۶)\ ۱^{۴}+۲^{۴}+۳^{۴}+...+n^{۴}=\frac{n(n+۱)(۶n^{۳}+۹n^{۲}+n+۱)}{۳۰}$$

مثال: حاصل همگرایی دنباله‌های زیر را بیابید.

$$۱)\ a_n=\left\{(\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+...+n^{۲}}{۳n^{۲}}-\frac{n}{۹}\right\}$$

۲) اگر $a_n=n+\frac{۱}{۲}$ و $b_n=\frac{۱+۳+۵+...+(۲n-۱)}{n+۱}$ مفروض باشند دنباله b_n-a_n به چه عددی همگراست.

$$۳)\ a_n=\frac{۱^{۲}-۲^{۲}+۳^{۲}-۴^{۲}+...+(۲n-۱)^{۲}-(۲n)^{۲}}{n^{۲}}$$

(**قضیه فشردگی**): فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L$ و همچنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر n طبیعی، $a_n\le c_n\le b_n$ در این صورت دنباله $\{c_n\}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=L$

اثبات قضیه:

مثال: نشان دهید دنباله $\left\{a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right\}$ همگرا به (۱) است؟

حل: فرض می‌کنیم $x_1<x_2<x_3<\dots<x_n$ بنابراین:

$$nx_1=\underbrace{x_1+x_1+\dots+x_1}_{n\text{ بار}}<x_1+x_2+x_3+\dots+x_n<x_n+x_n+\dots+x_n=nx_n$$

در این مثال اگر $x_1=\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ و ... $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ در نظر بگیریم داریم:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}<\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}_{a_n}<\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}}_{1}<\lim_{n\to+\infty}a_n<\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}}_{1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=1$$

مثال: با استفاده از قضیه فشردگی حاصل همگرایی هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید؟

۱) $1+a_n\le\frac{2n+6+a_n}{n+3},\ a_n\ge 1$

۲) $a_n=\frac{[x]+[2x]+\dots+[nx]}{x^2}:x\in R$ ✳

۳) $\frac{3n^2+1}{n^2}\le a_n\le 4+\frac{1-n}{n}$

۴) $n\tan^{-1}n\le 1+na_n\le n\tan^{-1}(n+2)$

مثال: اگر $1<|a|<|b|$ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$ کدام است؟

مثال: اگر $S_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n})$ حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ به ازای $x=\sin\frac{\pi}{10}$ کدام است؟

مثال: اگر دنباله با جمله عمومی $a_n=\begin{cases}\frac{2n}{n+1}: & n \text{ زوج}\\ \frac{(a-1)n^2+bn+3}{(2b-1)n+2}: & n \text{ فرد}\end{cases}$ همگرا باشد $2a+3b$ کدام است؟

مثال: حاصل همگرایی دنباله‌های $a_n=\left[\frac{1}{n}\sin n\right]$ و $b_n=\left[\frac{1}{n}\tan n\right]$ را بیابید؟

نکته: اگر a_n همگرا و b_n واگرا باشند آنگاه:

الف: $a_n\pm b_n$ و $\frac{b_n}{a_n}$ واگرا هستند.

ب: در مورد همگرایی $a_nb_n,\frac{a_n}{b_n}$ می‌بایست بررسی کرد (ممکن است همگرا باشند، ممکن است واگرا)

مثال: اگر $a_n=\frac{n+1}{n^2-2}$ و $b_n=\frac{n^2+1}{n+1}$ در مورد همگرایی دنباله‌های $a_nb_n,\frac{a_n}{b_n},a_n-b_n$ چه می‌توان گفت؟

تست: اگر $a_n=\frac{2}{n^2}$ و $b_n=5n^2$ و $c_n=\frac{5}{n}$ کدام دنباله زیر همگراست؟

۱) a_n+b_n ۲) b_n+c_n ۳) b_nc_n ۴) a_nc_n

نکته: اگر a_n و b_n هر دو واگرا باشند، در مورد همگرایی یا واگرایی هیچ کدام از دنباله‌های $a_n \pm b_n$ و $a_n . b_n$ و $\frac{a_n}{b_n}$ و $\frac{b_n}{a_n}$ حرفی نمی‌توان زد (حتماً باید بررسی شوند).

مثال: اگر $a_n = \frac{n^2}{n+3}$ و $b_n = \frac{n^2}{n+1}$ آنگاه $a_n - b_n$ همگرا به چه عددی است.

مثال: اگر $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ و $b_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ آنگاه دنباله‌های $\{a_n b_n\}$ و $\{a_n + b_n\}$ به ترتیب به چه اعدادی همگرا هستند.

مثال: اگر $a_n = (-1)^n - (-1)^{n+1}$ آنگاه $\lim\limits_{n\to 10000} a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟

مثال: اگر $\{a_n\}$ همگرا و $\{b_n\}$ واگرا باشند در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های $\{a_n b_n^2\}$ و $\{a_n + |b_n|\}$ و $\{|a_n| + b_n\}$ و $\{|a_n + b_n|\}$ چه می‌توان گفت.

نکته: ارتباط دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$ و هر دنباله‌های وارون آنها

۱) اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

۲) گر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ و $a_n > 0$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

۳) گر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ و $a_n < 0$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

مفهوم نکته بالا واضح است، اگر جملات دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ بزرگ و بزرگتر شوند وارون آنها به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند پس حد دنباله $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ برابر صفر است و همچنین اگر جملات دنباله‌ای بسیار کوچک و مثبت باشند، وارون آنها بسیار بزرگ می‌شود.

نکته: دنباله‌های $\{\sqrt[n]{1}\},\{\sqrt[n]{2}\},\ldots,\{\sqrt[n]{a}\}$ که $a>0$ همواره به عدد (۱) همگرا می‌باشند و همچنین $\{\sqrt[n]{n}\}$ نیز به عدد (۱) همگراست

یعنی $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

مثال: اگر $a_n=\frac{2^{3n+1}}{n^n}$ آنگاه $\lim\sqrt[n]{a_n}$ همگرا به چه عددی است.

مثال: اگر $0<a<b<c$ آنگاه دنباله $X_n=\left\{\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ همگرا به چه عددی است.

تذکر: برای محاسبه حد بعضی از دنباله‌ها می‌بایست از تعویض متغیر استفاده کنیم تا پس از ساده کردن شکل دنباله، حد آن را بیابیم.

مثال: دنباله $a_n=\left\{\frac{(1+\frac{1}{n})^4-(1+\frac{1}{n})^3}{(1+\frac{1}{n})^5-(1+\frac{1}{n})^2}\right\}$ همگرا به چه عددی است.

دنباله‌های کران دار

۱) دنباله $\{a_n\}$ را از پایین کران دار می‌گوییم هرگاه عددی حقیقی مانند m یافت شود به طوری که برای هر $n\in N$ و $m<a_n$ به عبارتی عددی مانند m یافت شود که از همه جملات دنباله کوچکتر باشد.

۲) دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کران دار می‌گوییم هرگاه عددی حقیقی باشد M یافت شود به طوری که برای هر $n\in N$، $a_n<M$ به عبارتی عددی مانند M یافت شود که از همه جملات دنباله بزرگتر باشد.

۳) دنباله $\{a_n\}$ را کران دار می‌گوییم، هرگاه هم از پایین و هم از بالا کران دار باشد، $m<a_n<M$

مثال: دنباله $\{n^3\}$ از پایین کران دار و $\{-n!\}$ از بالا کران دار و دنباله $\{\cos n\pi\}$ هم از بالا و هم از پایین کران دار می‌باشد.

تذکر ۱: اگر دنباله‌ای کران دار نباشد آن را بی کران گویند.

تذکر ۲: اگر دنباله‌ای فقط کران بالا یا فقط کران پایین داشته باشد، بی کران است.

تذکر ۳: دنباله $\{a_n\}$ کران دار است اگر و تنها اگر عددی مثبت مانند k موجود باشد که برای هر n طبیعی $|a_n|\leq k$

تذکر ۴: هر دنباله همگرا کران دار است.

تذکر ۵: اگر دنباله‌ای به $\pm\infty$ واگرا باشد حتماً بی کران است.

تذکر ۶: هر دنباله کران دار لزوماً همگرا نسبت مانند $\{(-1)^n\}$

تذکر ۷: مجموع، تفاضل و حاصلضرب دو دنباله کران دار، خود یک دنباله کران دار است؟

تذکر ۸: مجموع و تفاضل یک دنباله کران دار با یک دنباله بی کران، دنباله‌ای بی کران است.

تذکر ۹: حاصلضرب یک دنباله کران دار در یک دنباله بی کران، حکم کلی ندارد (باید بررسی شود).

مثال: در مورد کران دار بودن دنباله‌های زیر بررسی کنید.

۱) $a_n=\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

۲) $b_n=\left\{(-1)^{n^2-n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$

۳) $c_n=\left\{\frac{n+2}{n+3}+(-1)^{4n+1}\right\}$

۴) $d_n=\left\{\frac{n+3}{n+2}\sin\frac{\pi}{n+2}\right\}$

۵) $X_n=\left\{\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}$

۶) $Y_n=\left\{n^2+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$

۷) $Z_n=\left\{\sqrt[3]{n^3+6n^2+8n+1}-n\right\}$

تست ۱: چند تا از دنباله‌های زیر کران دارند $\{\sqrt{4n^2+2}-2n\}$ و $\left\{\frac{n^2+1}{3n}\right\}$ و $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ و $\{n+n\cos n\pi\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۲: کدام دنباله زیر از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نیست.

۱) $\left\{\log \frac{1}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\sin \frac{\pi}{n}\right\}$ ۳) $\left\{\cot \frac{\pi}{n}\right\}$ ۴) $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}$

تست ۳: دنباله $\left\{10^{\left[\frac{\cos n\pi}{n}\right]}\right\}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) کران دار و واگرا ۲) کران دار و همگرا ۳) بی کران و واگرا ۴) بی کران و همگرا

تست ۴: کدام دنباله کران دار نیست؟

۱) $\left\{\frac{n+\cos n\pi}{2n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{2n^2-1}{n^2}\right\}$ ۳) $\left\{\sin \frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\right\}$ ۴) $\left\{n\sin \frac{n\pi}{2}\right\}$

تست ۵: بزرگترین جمله دنباله $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+121}\right\}$ کدام جمله است.

۱) دهم ۲) یازدهم ۳) اول ۴) صد و بیست و یکم

دنباله‌های یکنوا

تعریف: ۱) دنباله $\{a_n\}$ را صعودی یا صعودی اکید می‌نامیم هرگاه برای هر n طبیعی $a_{n+1}>a_n$

۲) دنباله $\{a_n\}$ را نزولی یا نزولی اکید می‌نامیم هرگاه برای هر n طبیعی $a_{n+1}<a_n$

۳) دنباله صعودی یا نزولی را یکنوا گویند.

مثال: دنباله‌های $\{n^3\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{\log n\}$ و $\{\tan^{-1} n\}$ صعودی یا صعودی اکیدند.

مثال: دنباله‌های $\{-n^2\}$ و $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\log \frac{1}{n}\right\}$ و $\{\cot^{-1} n\}$ نزولی یا نزولی اکیدند.

نکته: هر دنباله صعودی از پایین کران دار است و هر دنباله نزولی از بالا کران دار است.

مثال: دنباله $\left\{\frac{2^n}{2^{n+1}}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

مثال: دنباله $\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,3,2$ از نظر یکنوایی و همگرایی چگونه است؟

مثال: دنباله $a_n=\left\{[-\frac{1}{n}]\right\}$ از نظر یکنوایی و همگرایی چگونه است؟

مثال: دنباله $a_n=\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ از نظر یکنوایی و همگرایی چگونه است؟

روش‌های تشخیص یکنوایی دنباله

روش اول: با استفاده از تفاضل جمله‌های متوالی

برای تشخیص یکنوایی $\{a_n\}$ می‌توانیم $a_{n+1}-a_n$ را تشکیل دهیم در این صورت:

۱) اگر برای هر n طبیعی $a_{n+1}-a_n>0$ آنگاه $\{a_n\}$ صعودی است.

۲) اگر برای هر n طبیعی $a_{n+1}-a_n<0$ آنگاه $\{a_n\}$ نزولی است.

مثال: دنباله $\left\{n^2+\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است.

مثال: دنباله $\left\{\frac{1+2^n}{3+2^{n-1}}\right\}$ از نظر یکنوایی و همگرایی چگونه است؟

روش دوم: استفاده از نسبت جمله‌های متوالی

اگر جملات دنباله $\{a_n\}$ همگی مثبت باشند آنگاه:

الف: اگر برای هر n طبیعی، $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ آنگاه $\{a_n\}$ صعودی است.

ب: اگر برای هر n طبیعی، $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ آنگاه $\{a_n\}$ نزولی است.

مثال: دنباله $a_n=\left\{\frac{5^n}{(n+1)!}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است.

مثال: دنباله $\left\{a_n=\frac{n^2}{2^n}\right\}$ از نظر یکنوایی و کران داری و همگرایی چگونه است؟

روش سوم: با استفاده از مشتق تابع متناظر دنباله

تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ مفروض است در این صورت

الف: اگر به ازای $x\geq 1$، $f'(x)>0$ در این صورت دنباله $f(n)$ صعودی است.

ب: اگر به ازای $x\geq 1$، $f'(x)<0$ در این صورت دنباله $f(n)$ نزولی است.

مثال: دنباله $a_n=\left\{\frac{3n}{n^2+2}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

مثال: دنباله $a_n=\frac{3n+1}{3n-14}$ از نظر یکنوایی و کران داری چگونه است؟

روش ۴: استفاده از ترکیب توابع

تابع $y=f(x)$ و دنباله یکنوای $\{a_n\}$ مفروض هستند.

الف: اگر تابع f در برد دنباله $\{a_n\}$ صعودی باشد آنگاه وضعیت یکنوایی $\{a_n\}$ و $\{f(a_n)\}$ یکسان هستند.

ب: اگر تابع f در برد دنباله $\{a_n\}$ نزولی باشد آنگاه وضعیت یکنوایی $\{a_n\}$ و $\{f(a_n)\}$ برعکس یکدیگرند.

مثال: دنباله‌های $a_n=\left\{\cos\frac{\pi}{n+2}\right\}$ و $b_n=\left\{\log\frac{1}{n}\right\}$ و $c_n=\left\{\tan^{-1}(\sin\frac{\pi}{n+1})\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه هستند.

نکته: اگر دنباله a_n، دنباله‌ای با جملات هم علامت (همگی مثبت یا همگی منفی باشند) وضعیت یکنوایی دنباله‌های $\{-a_n\}$ و $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ برعکس دنباله اولیه $\{a_n\}$ می‌باشند.

مثال: اگر $\{a_n\}$ صعودی باشد آنگاه $b_n=\left\{a_n-\frac{1}{n}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

مثال: اگر $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$ و $b_n=a_n+\frac{1}{n}$ مفروض هستند، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از نظر یکنوایی چگونه هستند.

مثال: دنباله $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$ از نظر یکنوایی و کران داری چگونه است؟

روش ۵: روش مقایسه در حل تست

اگر بدانیم دنباله یکنواست با استفاده از یکی از ۲ روش زیر می‌توانیم یکنوایی دنباله را بررسی کنیم.

۱) با مقایسه عددی جمله‌های a_1 و a_2

۲) در صورت همگرا بودن دنباله با مقایسه عددی a_1 و L (حد دنباله)

قابل ذکر است که در صورت همگرا بودن و یکنوا بودن آن داریم:

الف: $a_1 > L$ دنباله نزولی ب: اگر $a_1 < L$ دنباله صعودی است.

تست ۱: دنباله $a_n = \{\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+n^2}\}$ از نظر همگرایی و یکنوایی چگونه است.

۱) همگرا- صعودی ۲) همگرا- نزولی ۳) واگرا- صعودی ۴) وگرا- نزولی

تست ۲: دنباله $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right\}$ چگونه است؟

۱) بی کران- یکنوا ۲) کران دار- غیریکنوا ۳) کران دار نزولی ۴) کران دار صعودی

تست ۳: به ازای چه مقادیری از k دنباله $a_n = \dfrac{kn}{1+n^2}$ صعودی است:

۱) $k \geq 0$ ۲) $k \leq 0$ ۳) $k \leq 1$ ۴) $k \geq 1$

تست ۴: دنباله $\left\{\tan^{-1}\log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{2n+3}{n+1})\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی بعد نزولی ۴) ابتدا نزولی بعد صعودی

تست ۵: دنباله $a_n=\left\{\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\right\}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) همگرا و نزولی ۲) همگرا و صعودی ۳) واگرا و نزولی ۴) واگرا و صعودی

نکته: الف: اگر برای هر n، $a_n\le b_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L_2$ آنگاه $L_1\le L_2$

ب: اگر برای هر n طبیعی $0\le a_n\le b_n$ و a_n یکنوا آنگاه:

۱) اگر b_n همگرا باشد آنگاه a_n همگراست.

۲) اگر a_n واگرا باشد آنگاه b_n واگراست.

تست ۶: دنباله a_n همگراست اگر برای هر n، $|a_n|<|b_n|$، آنگاه در مورد b_n کدام صحیح است.

۱) همگراست ۲) کران دار است ۳) یکنواست ۴) غیریکنواست

مجموعه‌های کران دار

تعریف: فرض کنید A زیرمجموعه غیرتهی از R باشد در این صورت:

۱) A را از بالا کران دار می‌گوییم هرگاه عددی یافت شود که بزرگتر یا مساوی همه اعضای A باشد.

۲) A را از پایین کران دار می‌گوییم هرگاه عددی یافت شود که کوچکتر یا مساوی همه اعضای A باشد.

۳) A را کران دار می‌گوییم هرگاه هم از پایین و هم از بالا کران دار باشد.

مثال: $A=(-\infty,2)$ فقط از بالا کران دار است.

مثال: $B=(\frac{1}{2},+\infty)$ فقط از پایین کران دار است.

مثال: $C=(-\infty,+\infty)$ از هر دو طرف بی کران است.

مثال: $D=(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ از هر دو طرف کران دار است.

تعریف: معادل کران داری مجموعه ناتهی A کران دار است اگر و تنها اگر عدد حقیقی باشد k یافت شود و به طوری که برای هر $x\in A$،

$|x|\le k$

مثال: اگر $A=(-۳,۶]$ آنگاه برای هر $x\in A$: $|x|\le ۶$

مثال: اگر $A=(-۸,-۱)$ آنگاه برای هر $x\in A$: $|x|\le ۸$

تذکر: عدد k منحصر به فرد نیست، برای مثال اگر $A=[-۱,۳]$ می‌توان $|k|\le ۷$

نکته: $A=[a,b]$ یا $A=(a,b)$ آنگاه کمترین مقدار k عبارت **است** از $k=\max\{|a|,|b|\}$

مثال: کران داری $A=\left\{\frac{x}{۲}-[\frac{x+۱}{۲}]:x\in R\right\}$ را بررسی کنید.

مثال: کران داری مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $A=\left\{\frac{\sqrt{x}}{x^۲+۱}:x\in R^+\right\}$

۲) $B=\left\{\frac{x}{x+۱}:x\in R-\{-۱\}\right\}$

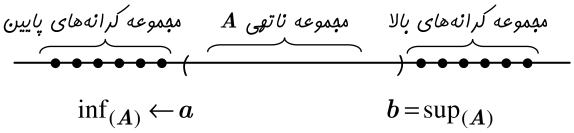
۳) $C=\left\{x\in Q:x^۲<۳\right\}$

۴) $D=\left\{\frac{x^۲+۱}{x^۲}:x\in Z-\{۰\}\right\}$

اصل موضوع تمامیت:

طبق اصل موضوع تمامیت، اگر A مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد و یک کران بالا داشته باشد قطعاً کوچکترین کران بالا دارد و به طور متناظر، اگر A یک کران پایین داشته باشد قطعاً بزرگترین کران پایین دارد.

تذکر: کوچکترین کران بالای یک مجموعه ناتهی A در صورت وجود $\sup_{(A)}$ (سوپریمم A) و بزرگترین کرانه پایین A را در صورت وجود $\inf_{(A)}$ (اینفیمم A) گویند.



برای مثال اگر $A=(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]$ آنگاه $\sup_{(A)}=b$ و $\inf_{(A)}=a$ می‌باشد.

مثال: برای هر یک از مجموعه‌های زیر sup و inf را در صورت وجود بیابید.

۱) $A=\left\{-x^{۲}:x\in R,-۵<x<-۲\right\}$

۲) $A=\{x\in R,|x-۴|<۲\}$

۳) $A=\left\{x^{۲}:x\in R,[|۲x-۲|]\le ۲\right\}$

۴) $A=\left\{x\in R:۰<\frac{۱}{x}<۱\right\}$

۵) $A=\left\{x\in R:\frac{۱}{x}\in N\right\}$

مثال: در هر یک از دنباله‌های زیر $\sup_{(an)}$ و $\inf_{(an)}$ را بیابید:

۱) $a_n=\left\{\frac{۷n+۱}{۴n+۱}\right\}$

۲) $b_n=\left\{\frac{-۳n^{۲}+۱}{۵n^{۲}+۱}\right\}$

۳) $c_n=\left\{\frac{n^{۲}+۳(-۱)^n}{n^{۲}+۱}\right\}$

قضیه وایرشتراس

الف: هر دنباله صعودی و از بالا کران دار همگراست و همگرا به $\sup_{(an)}$ است.

ب: هر دنباله نزولی و از پایین کران دار همگراست و همگرا به $\inf_{(an)}$ است.

نزولی و از پایین کران دار همگرا به L صعودی از بالا کران دار و همگرا به L

مثال: نشان دهید sup دنباله $a_n=\frac{۲n^۲+۳}{n^۲+۱}$ برابر با (۲) است.

مثال: نشان دهید دنباله $a_n=\left\{\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+...+\frac{۱}{۲n}\right\}$ همگراست.

* **مثال**: دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_{n+۱}=\sqrt{a_n+۷}$ و $a_۱=۱$ تعریف شده، ثابت کنید دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

مثال: همگرایی دنباله‌های $a_n=\left\{\sin\frac{\pi}{۲n}\right\}$ و $b_n=\left\{۱+\frac{۱}{n^۲+۱}\right\}$ با استفاده از قضیه ویراشتراس بررسی کنید.

مثال: اگر $a_n<۰$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=۰$ آنگاه در مورد $\sup$ و $\inf$ دنباله $\left\{\frac{۱}{a_n}\right\}$ بحث کنید.

عدد پنر (e)

نکته: دنباله $\left\{(۱+\frac{۱}{n})^n\right\}$، صعودی و کران دار است بنابراین همگراست و حد این دنباله را e می‌نامیم که $(e\simeq ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴...)$ و به e عدد پنر می‌گویند، همچنین لگاریتم با پایه e را «لگاریتم طبیعی» می‌نامند و آن را به ln نمایش می‌دهیم.

$$\ln x=\log_e^x \quad , \quad e^{\ln x}=x$$

تذکر: الف: دنباله $a_n=(1-\frac{1}{n})^n$ صعودی است چرا؟

ب: دنباله $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ نزولی است چرا؟

برای اثبات یکنوایی دنباله‌ها می‌توانید از نامساوی برنولی استفاده کنید $(1+a)^n \geq 1+na$

مثال: حد دنباله‌های زیر را بیابید؟

۱) $a_n=(1+\frac{1}{n})^{2n}$ ۲) $b_n=(1+\frac{1}{n})^{3n}$ ۳) $c_n=(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$

(راهنمایی از قاعده توان‌های تکرر $\left((x)^y\right)^z=x^{yz}$ می‌توان استفاده کرد.

نکته: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n})^{bn}=e^{ab}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{a}{x})^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$

مثال: حد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

۱) $a_n=(\frac{n+2}{n})^n$

۲) $b_n=\ln(\frac{n+1}{n})$

۳) $c_n=(\frac{n+\ln 2}{n})^n$

۴) $d_n=(1+\frac{1}{n^2})^n$

۵) $x_n=(\frac{n^2+1}{n^2-1})^{n^2}$

مثال: اگر دنباله $a_n=\left\{(\frac{n+c}{n-c})^n\right\}$ همگرا به ۹ باشد $c=?$

نکته: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله با شرایط $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\infty$ آنگاه در محاسبه حد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ به حالت 1^∞ برمی‌خوریم که یکی از صورت‌های مبهم است، برای رفع این ابهام از تساوی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-1)b_n}$$

صور مبهم: $(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\times\infty,1^\infty,0^0,\infty^0)$

مثال: حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2n+1}{2n-1})^{n^2}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{2n+1}{2n-1})^{n^2}=1^\infty \text{ مبهم } \Rightarrow L=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n-1}-1)n^2}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\cancel{2n}H-\cancel{2n}+1}{2n-1})n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n-1}}=e^{+\infty}=+\infty$$

مثال: حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید. (راهنمایی: $\lim\limits_{n\to+\infty}(an)^{bn}=(\lim\limits_{n\to\infty} an)^{\lim\limits_{n\to+\infty} bn}$)

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\frac{n+2}{n-1})^{\frac{n}{2}}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n^2-2n+1}{n^2+3n})^{1-n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^n}{2^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n}\ln n$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^n, a>1\ a\in R$

تست ۱: دنباله $\left|\dfrac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+8}}\right|$ چگونه است؟

۱) کران دار و صعودی ۲) بی کران و صعودی ۳) کران دار و غیریکنوا ۴) بی کران و نزولی

تست ۲: قدرمطلق اختلاف sup و inf مجموعه مقادیر دنباله $a_n=\{\tan^{-1}(-n^2+7n-13)\}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

تست ۳: در مورد دنباله $a_n=\begin{cases}\dfrac{2n-1}{n+1} & : \text{فرد } n\\ 2a_{n-1} & : \text{زوج } n\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است.

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) واگرا ۴) بی کران

تست ۴: به ازای $n\geq M$، اندازه فاصله جملات دنباله $a_n=\left\{\left[\dfrac{n^2+29}{2n^2+3n+1}\right]\right\}$ از حد دنباله به حداقل می‌رسد کمترین مقدار طبیعی M کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تست ۵: کدام دنباله ثابت نیست؟

۱) $\left\{\cos(6n+1)\frac{\pi}{3}\right\}$ ۲) $\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ ۳) $\left\{(-1)^n\cos n\pi\right\}$ ۴) $\left\{(-1)^n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$

تست ۶: دنباله $a_n=\begin{cases}\frac{n-2}{-n+5}: n=2k\\ \frac{-n+5}{n+2} \quad n=2k-1\end{cases}$ در نظر می‌گیریم در مورد دنباله‌های $\{[a_n], a_n\}$ به ترتیب از راست به چپ چه می‌توان گفت.

۱) همگرا، واگرا ۲) واگرا، واگرا ۳) واگرا، همگرا ۴) همگرا، همگرا

دنباله حسابی

۱) اگر اختلاف هر دو جمله متوالی از یک دنباله مقداری ثابت باشد به آن دنباله، حسابی یا عددی گویند.

$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d+\dots$

۲) در هر دنباله عددی، جمله عمومی دنباله عبارت است $a_n=a_1+(n-1)d$

۳) در هر دنباله عددی، $d=a_2-a_1=a_3-a_2=\dots$

۴) در هر دنباله عددی (حسابی)

$$\begin{cases} d>0 \rightarrow \text{دنباله صعودی} \\ d=0 \rightarrow \text{دنباله ثابت} \\ d<0 \rightarrow \text{دنباله نزولی} \end{cases}$$

۵) در هر دنباله حسابی، $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$ (تعداد جملات)

۶) اگر a_n و a_m به ترتیب جملات n ام و m ام دنباله عددی باشند $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$

۷) اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، b را واسطه حسابی بین a و c گویند.

۸) اگر بین دو عدد a و b، n عدد قرار دهیم که با آن دو عدد دنباله حسابی تشکیل دهند به این عمل درج n واسطه حسابی بین a و گویند و در این حالت یک دنباله حسابی با $n+2$ جمله خواهیم داشت و $d=\frac{b-a}{n+1}$

۹) در هر دنباله حسابی، هر جمله میانگین حسابی دو جمله از طرفین‌اش است که با آن فاصله مساوی دارند.

$a_1, a_2, \dots, a_{30}, \dots, a_{49}, a_{50}, a_{51}, \dots, a_{70}, \dots, a_{90}$

$a_{50}=\frac{a_{49}+a_{51}}{2}=\frac{a_{30}+a_{70}}{2}=\frac{a_{10}+a_{90}}{2}$

۱۰) اگر چند دسته دوتایی از جملات یک دنباله حسابی داشته باشیم که جمع شماره جملاتشان با هم مساوی باشند جمع خود جملات هم با یکدیگر مساوی است به عبارتی

$m+n=k+l \Rightarrow a_m+a_n=a_k+a_l \quad (m,n,k,l \in N)$

$m-n=k-l \Rightarrow a_m-a_n=a_k-a_l$

۱۱) وقتی دو دنباله حسابی داریم، می‌خواهیم ببینیم جملات مشترک آنها چیست.

الف: اولین جمله مشترک دو دنباله را پیدا می‌کنیم.

ب: کوچکترین مضرب مشترک قدر نسبت‌های دو دنباله را پیدا می‌کنیم.

ج: جملات مشترک دو دنباله، یک دنباله حسابی است که جمله اول، اولین جمله مشترک و قدر نسبت آن ک م م قدر نسبت‌های آن دو دنباله می‌باشد.

۱۲) در هر دنباله حسابی $a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots$

الف: $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

ب: $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$

ج: اگر a_k جمله وسط در n جمله اول دنباله حسابی باشد: $S_n=na_k$ (n فرد است)

د: همواره جمله عمومی S_n در دنباله حسابی به صورت $S_n=An^۲+Bn$ باشد آنگاه $S_۱=a_۱$ و $d=۲A$

هـ: در هر دنباله حسابی: $a_n=S_n-S_{n-۱}$

۱۳) اگر S_n مجموع جملات دنباله از جمله اول تا جمله n ام باشد آنگاه مجموع جملات k ام تا جمله n ام عبارتست $(k<n)$

$a_k+a_{k+۱}+a_{k+۲}+...+a_n=S_n-S_{k-۱}$

۱۴) در هر دنباله حسابی، مجموع جملات شروع از جمله m ام و ختم به جمله k ام برابر است با $S_k-S_{m-۱}$

۱۵) $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ و $۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$ و $۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$

۱۶) اگر مجموع k جمله اول یک تصاعد حسابی p و مجموع k جمله آخر همان تصاعد l و تعداد جملات n باشد، مجموع (n) جمله اول برابر است با $S_n=\frac{p+l}{۲k}\times n$

۱۷) اگر در یک دنباله حسابی $t_m=n$ و $t_n=m$ آنگاه $t_{m+n}=۰$

تست ۱: اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله عددی می‌دهد، اگر عدد مساحت آن پنج برابر عدد محیط آن باشد، اندازه ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

تست ۲: به ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲-۲$ و $۲x$ و $x^۲+۴$ به ترتیب ۳ جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند، مجموع ۷ جمله اول این دنباله کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

تست ۳: دنباله حسابی با جمله اول ۶۳ و قدر نسبت (۴-)، چند جمله مثبت دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

تست ۴: دنباله حسابی $۱۰۰, ۹۶, ۹۲, \ldots, -۲۰$ چند جمله دارد؟

۱) ۲۹　　۲) ۳۰　　۳) ۳۱　　۴) ۳۲

تست ۵: در یک دنباله حسابی $۲a_۵ + a_{۱۵} + a_{۲۷} = ۴۸$، جمله سیزدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۰　　۳) ۸　　۴) ۶

تست ۶: در یک دنباله حسابی بین جملات رابطه $۲a_۱ + ۳a_۲ - ۵a_۳ = ۸$ برقرار است حاصل $۵a_۱ - ۳a_۲ - ۲a_۳$ کدام است؟

۱) -۸　　۲) $-\frac{۸}{۷}$　　۳) $\frac{۸}{۷}$　　۴) ۸

تست ۷: چند عدد ۳ رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟

۱) ۱۳۶　　۲) ۱۳۵　　۳) ۱۲۸　　۴) ۱۲۷

تست ۸: اگر a و b و c به ترتیب چهارمین، دهمین و نوزدهمین جملات یک دنباله حسابی باشد حاصل $\frac{a-b}{b-c}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۶}$

تست ۹: جمله اول یک دنباله عددی (۱−) و جمله سوم آن ۹ است، جمله پانزدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۶۴　　۲) ۶۶　　۳) ۶۹　　۴) ۷۱

تست ۱۰: در یک دنباله حسابی با جملات متمایز $a_4+a_8+a_{12}+\dots+a_{100}=0$ در این دنباله حاصل $\frac{a_3+a_7+a_{11}+\dots+a_{99}}{a_5+a_9+a_{13}+\dots+a_{101}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۰۰− ۳) ۱ ۴) ۱−

تست ۱۱: تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله عددی ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم آن ۲۵ است جمله (۲۱) ام این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

تست ۱۲: اعداد $5p-1$ و $3p+4$ و $2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تست ۱۳: بین دو عدد ۲۵− و ۱۲۰، بیست و هشت عدد نوشته‌ایم به طوری که با آنها دنباله حسابی می‌سازد بزرگترین این عدد کدام است؟

۱) ۱۱۶/۵ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۰

تست ۱۴: بین دو عدد x و $x-100$، ۶ عدد اضافه کرده‌ایم که با آنها دنباله حسابی می‌سازند حاصل جمع کوچکترین و بزرگترین این اعداد کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۰− ۳) صفر ۴) به مقدار x بستگی دارد.

تست ۱۵: حاصل عبارت $A = ۹۹^۲ - ۹۸^۲ + ۹۷^۲ - ۹۶^۲ + ... + ۳^۲ - ۲^۲ + ۱$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۴۹۵۰ ۳) ۵۰۲۵ ۴) ۴۹۷۵

تست ۱۶: در دنباله حسابی $..., -۲۱, x, -۲۷$، مجموع جملات منفی کدام است؟

۱) ۱۳۵- ۲) ۱۵۰- ۳) ۷۵- ۴) ۲۷۰-

تست ۱۷: مجموع تمام اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

۱) ۲۴۲۰ ۲) ۲۴۵۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۵۰

تست ۱۸: در یک دنباله عددی $(a_۱ + a_۸ = ۰)$ و $a_۷ = ۴$، مجموع ۸ جمله اول آن کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۸-

تست ۱۹: مجموع اعداد طبیعی فرد بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از (۱۰۱) کدام است؟

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

تست ۲۰: در یک دنباله عددی با جمله اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود. آنگاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

تست ۲۱: در دنباله حسابی $-۵,-۱,۳,۷,...$، حداقل چند جمله از اول آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۱۰ بیشتر شود.

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

تست ۲۲: اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مجذور کامل باشد مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

$(۱),(۲,۳,۴),(۵,۶,۷,۸,۹),...$

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

تست ۲۳: مجموع n جمله اول یک دنباله به صورت $S_n=۳n^۲+۲n$ است، مجموع جملات پنجم و ششم این دنباله چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۶۴ ۴) ۶۳

تست ۲۴: حاصل جمع n جمله اول دنباله $\{a_n\}$ از رابطه $S_n=n^۳-n$ به دست می‌آید کدام گزینه یکی از جملات دنباله است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷۰ ۳) ۶۵ ۴) ۴۱۲

تست ۲۵: حاصل $A=۳+۵+۷+...+۱۱۹$ کدام است؟

۱) ۳۲۰۰ ۲) ۳۱۹۹ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۳۵۹۹

تست ۲۶: در بیست جمله اول از یک دنباله عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد جمله اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست ۲۷: در یک دنباله عددی، جمله هفتم نصف جمله سوم است، مجموع چند جمله اول آن صفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

تست ۲۸: مقدار x از معادله $۱+۵+۹+...+x=۲۳۱$ کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۳۷

تست ۲۹: بین دو عدد که تفاضل آنها ۸۴۰ است، پنج واسطه عددی درج شده، قدر نسبت تصاعد چقدر است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۴۰

تست ۳۰: تصاعد هندسی $...,\frac{۱}{۲},x,۲$ غیرنزولی است، مجموع ۶ جمله اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

تست ۳۱: مجموع ۲۰ جمله اول یک تصاعد حسابی با مجموع ۳۰ جمله اول آن مساوی است، مجموع ۵۰ جمله اول آن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۵ ۳) ۶۰۰ ۴) ۱۰

تست ۳۲: اعداد $۳x-۱$ و $x+۵$ و $۴x+۱$ به ترتیب جملات اول و سوم و پنجم تصاعد حسابی هستند جمله چهارم تصاعد کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

تست ۳۳: مجموع همه اعداد موجود در جدول ضرب ۱۰×۱۰ چقدر است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۵۵۰۰ ۳) ۳۰۲۵ ۴) ۶۰۵۰

تست ۳۴: در یک تصاعد عددی که ۸۰ جمله دارد مجموع سه جمله اول ۶ و مجموع سه جمله آخر آن ۲۴ است مجموع هشتاد و جمله اول این تصاعد کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

تست ۳۵: شخصی در ماه اول A واحد پول پس انداز کرده، در هر ماه به اندازه $\frac{۱}{۲۵}A$ بیشتر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند تا مقدار پس‌انداز یک ماه آن دو برابر پس‌انداز ماه اول باشد، اگر در این زمان، پس‌انداز وی ۱۷۱۶۰۰ باشد، اولین پس‌انداز وی چقدر بوده است؟ (جامع سنجش ۹۳)

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۳۸۰۰ ۳) ۴۲۰۰ ۴) ۴۴۰۰

تست ۳۶: در یک تصاعد حسابی مجموع ۱۴ جمله اول تصاعد پنج برابر مجموع ۶ جمله اول این تصاعد است جمله هشتم این تصاعد چند برابر جمله اول آن است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

تست ۳۷: جمله n ام یک دنباله حسابی به صورت $a_n = ۳n - ۵$ می‌باشد، مجموع جملات اول و سوم و پنجم و... و نوزدهم این تصاعد کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

تست ۳۸: مجموع جملات سوم و پنجم و ششم و دهم یک تصاعد حسابی برابر ۵۲ است، مجموع یازده جمله اول این تصاعد کدام است؟

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۲۱

تست ۳۹: بین دو عدد $a+۳$ و $۵a+۷$ سه واسطه حسابی درج نموده‌ایم، به ازای کدام مقدار a، مجموع ۳ واسطه ۲۱ است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

دنباله هندسی

۱) هرگاه در یک دنباله از اعداد، حاصل تقسیم هر جمله به جمل قبل از آن عددی ثابت باشد به آن دنباله هندسی گویند. که به این مقدار ثابت (q) قدر نسبت دنباله هندسی می‌گویند.

$$\underbrace{a_۱}_{\text{جمله اول}} , a_۱q , a_۱q^۲ , a_۱q^۳ , \dots , \underbrace{a_۱q^{n-۱}}_{\text{جمله } n \text{ام}}$$

۲) در هر تصاعد هندسی، $q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۳}{a_۲} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-۱}}$

۳) در هر تصاعد هندسی، جمله عمومی (a_n) عبارتست از: $a_n = a_۱q^{n-۱}$

۴) اگر در یک تصاعد هندسی:

الف: $|q|>۱$ و $a_۱>۰$ دنباله صعودی

ب: $۰<q<۱$ دنباله نزولی و $(a_۱>۰)$

ج: $q=۱$ دنباله ثابت

د: $q=-۱$ دنباله نوسانی

ه: اگر $a_۱<۰$ و $q>۱$ دنباله نزولی

و: اگر $a_۱<۰$ و $۰<q<۱$ دنباله صعودی

۵) اگر جمله عمومی یک دنباله، تابع نمایی از n باشد، دنباله هندسی است و فرم کلی آن به صورت $a_n = A(B)^n$ نمایش داده می‌شود.

۶) اگر جملات m ام و nام یک دنباله هندسی معلوم باشد $\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$

۷) در یک تصاعد هندسی، حاصلضرب جملات متساوی‌الفاصله از طرفین مساوی است یعنی: $a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\dots$

۸) در یک دنباله هندسی، حاصلضرب n جمله اول آن برابر است: $P_{(n)}=\sqrt{(a_1a_n)^n}$

۹) سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را می‌توان به صورت aq و a و $\frac{a}{q}$ در نظر گرفت.

۱۰) اگر x، y، z سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشد آنگاه، $y^2=xz$ که در این حالت به y واسطه هندسی یا میانگین هندسی گویند.

۱۱) اگر چند دسته دوتایی از جملات دنباله‌ی هندسی داشته باشیم که جمع شماره‌هایشان مساوی بود. ضرب خود جملات هم مساوی می‌شود (قانون اندیس‌ها)

$$m+n=K+L\Rightarrow a_m.a_n=a_K.a_L$$
$$m-n=K-L\Rightarrow a_m\div a_n=a_K\div a_L$$

۱۲) اگر بین دو عدد a و b، تعداد n عدد قرار دهیم به طوری که دنباله هندسی تشکیل شود. (درج واسطه هندسی)، یک دنباله با $n+2$ جمله خواهیم داشت که a جمله اول آن و b، جمله‌ی $(n+2)$ام آن می‌باشد.

$$a,x_1,x_2,\dots,x_n,b$$
$$q^{n+2-1}=\frac{b}{a}\Rightarrow q^{n+1}=\frac{b}{a}$$

۱۳) در هر دنباله هندسی، مجموع n جمله اول آن با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با: $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1a_nq}{1-q}$

۱۴) اگر در یک دنباله هندسی S_{2n} و S_n به ترتیب مجموع $2n$ جمله اول و n جمله اول باشد آن‌گاه: $\frac{S_{2n}}{S_n}=1+q^n$

۱۵) در یک دنباله هندسی، اگر $|q|<1$ و تعداد جملات نامتناهی باشد آن‌گاه $\boxed{S_n=\frac{a}{1-q}}$ زیرا در رابطه $S_n=\frac{a_1(1-q)^n}{1-q}$، اگر $|q|<1$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ است.

۱۶) هرگاه هر یک از جملات یک تصاعد هندسی را به توان K برسانیم، جمله‌های حاصل نیز تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند که جمله اول آن a_1^K و قدرنسبت آن q^K است در نتیجه اگر تصاعد نزولی باش هر مجموع عبارتست از: $S=\frac{a_1^K}{1-q^K}$.

۱۷. اگر اضلاع یک مثلث تشکیل دنباله هندسی دهند، ارتفاع‌های این مثلث نیز تشکیل تصاعد هندسی خواهند داد.

تست‌های دنباله هندسی

۱. حاصل $A=(1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۲. در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله‌ای اول آن است؟ (سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳. بزرگترین جمله‌ی تصاعد هندسی $c,d,\frac{1}{24}$ و $a,b,\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴. بین دو عدد ۱، ۶۴، ۵ واسطه حسابی درج کرده‌ایم، جمله‌ی وسط A و بین همین دو عدد ۵ واسطه هندسی درج کرده‌ایم، جمله‌ی وسط B است، کدام گزینه درست است:

۱) $A+B=40/5$ ۲) $A-B=24$ ۳) $A=B$ ۴) $A=\sqrt{B}$

۵. اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک تصاعد حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک تصاعد هندسی باشند، قدر نسبت تصاعد هندسی کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۶. در یک تصاعد هندسی حاصلضرب ۹ جمله اول برابر هشت است $(a_1a_2 \ldots a_9=8)$ آنگاه حاصلضرب $a_2a_4a_6a_8$ چقدر است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt[4]{2}$ ۴) ۴

۷. قدرنسبت دو تصاعد هندسی برابر و جمله اول یکی دو برابر جمله اول دو برابر جمله اول دیگری است، جمله nاُم تصاعد اول چند برابر جمله‌ی nاُم تصاعد دوم است؟

۱) ۲ ۲) $2n$ ۳) 2^n ۴) n^2

۸. اگر a_1 و a_2 و a_3 سه جمله اول یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ باشد، کدام گزینه سه جمله اول یک تصاعد هندسی هستند.

۱) $a_1+1\,,\,a_2+a_1\,,\,a_3+a_2$ ۲) $a_1+1\,,\,a_2+4\,,\,a_3+16$

۳) $a_1+1\,,\,a_2+2\,,\,a_3+3$ ۴) $a_1+1\,,\,a_2+2\,,\,a_3+4$

۹. در یک دنباله هندسی مجموع ۱۰ جمله اول $\frac{4}{3}$ مجموع ۵ جمله اول آن است، جمله اول چند برابر جمله شانزدهم آن است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۰. مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی $\frac{3^n-2^n}{2^n}$ بدست می‌آید چه تعداد از جملات این تصاعد از ۲ کمتر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱. در یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\sqrt{2}$، حاصل $\frac{a_2+a_4+...+a_{100}}{a_1+a_3+...+a_{99}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲. حاصل عبارت $A=\frac{t^{11}+t^{10}+...+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به ازای $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳. در یک دنباله هندسی مجموع ۳ جمله متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد، تفاضل کوچکترین و بزرگترین این ۳ عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴. جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n=\frac{3(-1)^{n+1}}{4^{2n-1}}$ است، جمله‌ی اول این دنباله چند برابر قدرنسبت آن است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) -12

۱۵. اعداد 2^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از دنباله هندسی‌اند واسطه‌ی عددی بین a و b کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{2}$

۱۶. می‌خواهیم بین دو جواب معادله‌ای $2x^2-9x+3=0$، شش عدد چنان قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنباله هندسی بدهند، حاصلضرب کوچکترین و بزرگترین این اعداد کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۱۷. اعداد b و ۹ و $3\sqrt{3}$ و 3^a جملات متوالی یک دنباله هندسی‌اند، واسطه هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۹

۱۸. اگر $0<\frac{1}{x}<1$، جواب معادله‌ی $-2x=\dots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) معادله جواب ندارد.

۱۹. در یک دنباله هندسی صعودی به صورت ... و b و ۹ و a و ۴، مجموع شش جمله اول کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۹)

۱) $81\frac{3}{8}$ ۲) $81\frac{7}{8}$ ۳) $82\frac{3}{8}$ ۴) $83\frac{1}{8}$

۲۰. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع ۳ جمله اول ۱۳۶ و مجموع ۶ جمله اول آن ۱۵۳ است، جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۲۱. حاصل $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}-\frac{1}{729}+\dots$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{27}$ ۲) $\frac{12}{26}$ ۳) $\frac{11}{26}$ ۴) $\frac{11}{27}$

۲۲. جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی نامحدود به صورت $a_n=\frac{4^n-3^{n+1}}{5^n}$ است، حد مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۳. در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد مجموع ۶ جمله اول آن کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۲۴. بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل دنباله‌ی هندسی تشکیل داده‌اند، مجموع این هشت عدد کدام است؟

۱) $30(2+\sqrt{2})$ ۲) $48\sqrt{2}$ ۳) $30(\sqrt{2}+1)$ ۳) $36(\sqrt{2}+1)$

۲۵. در یک دنباله هندسی $\frac{a_1a_2a_3+a_5a_6a_7}{1+q^{12}}=8$ است، جمله‌ی دوم این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

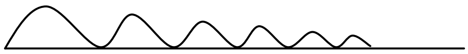
۲۶. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله‌ی $5x^2-28x+15=0$ باشند و دنباله‌ی x_1,a,x_2 هندسی باشند آن‌گاه:

۱) $|a|=5/6$ ۲) $|a|=3$ ۳) $|a|=3$ ۴) $|a|=0$

۲۷. در یک دنباله هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲۵ ۳) ۵ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۸. موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند با قطر اولیه ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند ۲۰٪ ارتفاع قبلی بالا می‌رود، پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن توپ چند متر مسافت طی کرده است؟



۱) 2π ۲) 3π ۳) $\frac{3}{2}\pi$ ۴) $\frac{5}{2}\pi$

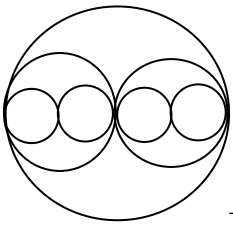
۲۹. توپی را از زمین به هوا پرتاب می‌کنیم تا به ارتفاع ۶ متری برسد، بعد از هر بار به زمین خوردن به اندازه ۲۰٪ ارتفاع قبلی بالا می‌رود، پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن توپ چند متر مسافت طی می‌کند.

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳۰. وسط‌های اضلاع مثلثی به مساحت ۳۰ را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث کوچکتری در وسط آن ایجاد شود، سپس برای مثلث جدید نیز این کار را تکرار می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم، حد مجموع مساحت مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟ (با احتساب مثلث اولیه)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۳۱. داخل دایره‌ای به مساحت S_1 دو دایره به شکل روبرو رسم می‌کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را S_2 می‌نامیم و این روند را تکرار می‌کنیم، S_n چند برابر S_1 است؟



۱) $\frac{1}{2^n}$ ۲) $\frac{1}{2^{n-1}}$ ۳) $\frac{1}{4^n}$ ۴) $\frac{1}{2^{n-1}}$

۳۲. حاصل عبارت $A=(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5)(\frac{1+x}{1-x^{12}})$ به ازای $x=\sqrt[3]{2}$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴