

فصل اول

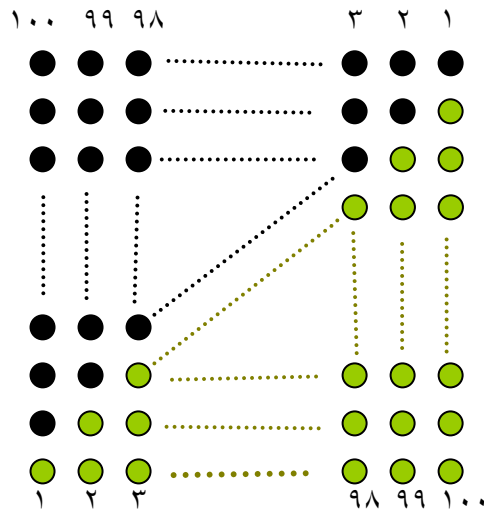
محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

۱. مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی
۲. تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری
۳. بسط دو جمله ای غیاث الدین جمشید کاشانی
۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ایها
۵. معادلات
۶. ماکزیموم و مینیموم توابع درجه دوم
۷. معادلات شامل عبارات گویا
۸. معادلات شامل عبارات گنگ
۹. حل معادلات به روش هندسی
۱۰. قدرمطلق و ویژگی های آن
۱۱. معادلات قدرمطلق
۱۲. نامعادلات قدرمطلق
۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش آموزان از آنها می خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می آورد و به معلم ارائه می کند.

آیا شما هم می توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل زیر می تواند ایده ای برای این کار به شما بدهد.



بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از تجربیاتی که در بالا به دست آورده اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند:

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $na + \frac{n(n-1)}{2}d$.

۳- نشان دهید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

بحث در کلاس

می گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه ای بدهد و از او خواست خودش جایزه ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندمها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند کیلو گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

حل یک مسئله

طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم. پس از چند مرحله بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می شود یک دنباله هندسی به شکل زیر تشکیل می دهد.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{4}\right)^n, \dots$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می شود برابر است با

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\frac{1}{4}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S_n &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = -\frac{1}{4} + S_n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

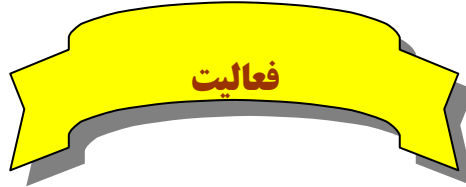
فصل اول - نسخه دوم

این تساوی معادله ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می شود، $S_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$.

حال باید نامعادله $1 - (\frac{1}{2})^n \leq \frac{99}{100}$ را حل کنیم.

$$\frac{99}{100} \leq 1 - (\frac{1}{2})^n \Rightarrow 99 \leq 100 - \frac{100}{2^n} \Rightarrow \frac{100}{2^n} \leq 1 \Rightarrow 100 \leq 2^n$$

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می کند ۷ می باشد، یعنی پس از مرحله هفتم بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.



۱- برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید:

$$(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$$

۲- اگر $q \neq 1$ نشان دهید:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

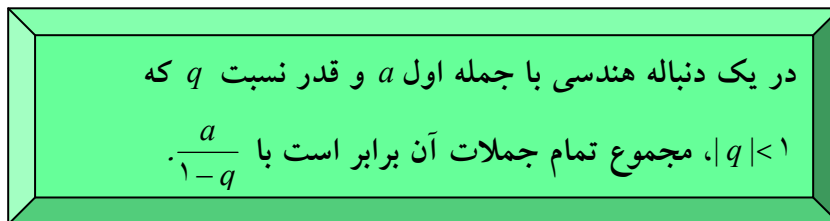
۳- اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$$

نشان دهید در حالت $q \neq 1$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

۴- در حالت $|q| < 1$ ، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.



مثال: تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به

فصل اول - نسخه دوم

ارتفاع ۵ متری برسد. می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چقدر مسافت طی می کند.

ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{5}{16}, \dots, A_n = \frac{5}{4^{n-1}}, \dots$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

$$10, \frac{10}{4}, \frac{10}{16}, \dots, \frac{10}{4^{n-1}}, \dots$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله

هندسی با جمله اول ۱۰ و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

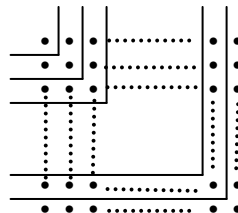
$$\frac{a}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = \frac{40}{3} \approx 13.33$$

یعنی توپ تقریباً ۱۳/۳۳ متر تا توقف کامل طی می کند.

مسائل

۱- در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲- به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.



۳- در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

۴- علی می خواهد پولهای خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز $\frac{1}{9}$ پول روز قبل در صندوق، پول قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

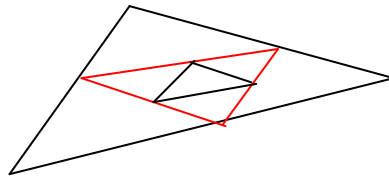
۵- فرض کنید که در انتشار یک ویروس سرماخوردگی در یک شهر، در طول روز هر فرد مبتلا سه

فصل اول - نسخه دوم

نفر را بیمار می کند و در پایان همان روز نیمی از مبتلایان سلامتی می یابند. اگر در روز اول ۱ نفر مبتلا باشد، پس از ۲۰ روز چند نفر مبتلا می شوند؟ اگر تعداد جمعیت شهر ۲۰۰۰۰۰۰ نفر باشد پس از چند روز همگان مریض می شوند؟

۶- برای محافظت از تابشهای مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابشها پس از عبور از آنها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

۷- یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسطهای اضلاع آن را به هم وصل می کنیم و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلثهای به دست آمده چقدر است؟ . مجموع مساحت مثلثهای به دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

در سالهای پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله ای $P(x)$ بر یک چندجمله ای دیگر $B(x)$ یک خارج قسمت $Q(x)$ و باقی مانده $R(x)$ به دست می آید که درجه $R(x)$ از درجه $B(x)$ کمتر خواهد بود و می توان نوشت:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را رابطه تقسیم می نامند.

تمرین در کلاس

۱. چندجمله ای $P(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1$ را بر چندجمله ای $B(x) = x^2 - 1$ تقسیم کنید.

فصل اول - نسخه دوم

۲. مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده را مشخص کنید.

۳. رابطه تقسیم را بنویسید و به کمک آن مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به دست آورید.

اگر باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می شود، $P(x) = B(x)Q(x)$

در این حالت گوئیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش پذیر است.

مثال: چندجمله‌ای $x^2 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است، زیرا $(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1) + 2$.

فعالیت

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ تقسیم شده است و باقی مانده‌ی آن R باشد.

۱- رابطه تقسیم را بنویسید.

۲- درجه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم چیست؟

۳- $P(a)$ را به دست آورید.

۴- اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.

باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ همان $P(a)$ است.

بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ بر $x + 1$ را حساب می کنیم.

$x + 1$ را می توانیم به صورت $x - (-1)$ بنویسیم، پس $P(-1)$ را حساب می کنیم.

$$R = P(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 3 = 2 - 5 - 1 + 3 = -1$$

باقیمانده تقسیم یک چندجمله ای مانند $P(x)$ بر چندجمله ای $ax + b$ را چگونه می توانیم به دست آوریم؟

تمرین در کلاس

الف) درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید:

۱. عبارت $2 - 5x + 3x^2$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.
۲. چندجمله ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.
۳. چندجمله ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است.
۴. باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است با $P(-b)$.

ب) در چه حالتی چندجمله ای $x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

ج) باقی مانده ی تقسیم $4x^2 - 2x + 1$ را بر $2x - 1$ تعیین کنید.

فعالیت

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- عبارت $aS - S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۲- اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

مثال: به کمک اتحادهای بالا عبارتهای زیر را ساده می کنیم.

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^7 - 1}, \quad B = \frac{(1 - t + t^2 - t^3 + t^4)(1 + t)}{t^5 - 1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می کنیم.

$$A = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

برای ساده کردن B می توان نوشت:

$$B = \frac{1 + t^5}{(t^5 + 1)(t^5 - 1)} = \frac{1}{t^5 - 1}$$

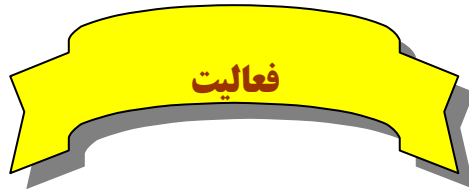
تمرین در کلاس

به کمک اتحاد $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سالهای قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ایها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ایها را به دست آورد.



به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آنها است توجه کنید.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
.....	

۱. چه الگویی در توانهای a و b و ضرایب آنها می یابید؟
۲. با توجه به الگوی به دست آمده $(a+b)^n$ برابر چه عبارتی می شود؟
۳. تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله ای چه رابطه ای دارد؟

هر عبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، **دوجمله ای نیاث الدین جمشید کاشانی** و بسط آن را به صورت چندجمله ای از a و b **بسط دوجمله ای نیاث الدین جمشید کاشانی** می نامند زیرا این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله ای دارای $n+1$ جمله است و هر جمله ی آن به صورت مضربی از $a^k b^{n-k}$ است و جملات $a^{n-k} b^k$ و $a^k b^{n-k}$ ضریب های مساوی دارند.

ضرایب بسط دوجمله ای را می توان در مثلی مانند زیر مرتب کرد که به آن مثلث خیام- پاسکال می گویند.

				1								
				1		1						
				1		2		1				
				1		3		3		1		
				1		4		6		4		1

فصل اول - نسخه دوم

مرتب نمودن ضرایب به صورت فوق را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آنها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس

۱- اعداد هر سطر در مثلث خیام- پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به دست می‌آیند؟

۲- چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث فوق با بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

۳- مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^r$ ، $(a+b)^r$ و $(a+b)^r$ را به دست آورید. آیا می‌توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

۳- طرف دوم هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(2x+y)^5 =$$

$$(3x+2z)^4 =$$

$$(2a-1)^6 =$$

مسائل

۱- $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

$$(الف) P(1) = 0, P(2) = 0 \quad (ب) P(1) = 1, P(0) = 0 \quad (ج) P(2) = -1, P(-1) = 2$$

۲- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x+1$ بخش پذیر باشد.

فصل اول - نسخه دوم

۳- در چندجمله‌ای $P(x) = x^r + ax^2 + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.

۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^r - 3x^2 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.

۵- نشان دهید عبارت $x-2$ یک فاکتور(عامل) $f(x) = x^r + 2x^2 - 5x - 6$ است. سپس معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنید.

۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^r - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.

۷- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } (1-x)^y \quad \text{ب) } \left(1 + \frac{2}{x}\right)^r \quad \text{ج) } (2x-3y)^r$$

۸- فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^n = 362 + b\sqrt{3}$ ، که در آن b یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی است. نشان دهید $(2 - \sqrt{3})^n = 362 - b\sqrt{3}$ و به کمک آن مقدار b را به دست آورید.

۹- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^s - x^r y^r, \quad B = (a^r + 1)^r - (a^r - 1)^r$$

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به دست آورید.

$$1 - x^n = (1+x)(1-x+\dots-x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله ایها

در دوره‌ی راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارتهای جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به تعمیم آن به عبارات جبری می‌پردازیم.

تجزیه عدد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را

می‌توان به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل‌های اول

فصل اول - نسخه دوم

تکراری را به صورت توانی بنویسیم به آن تجزیه استاندارد می‌گوییم.

برای تجزیه‌ی یک عدد به عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به صورت تجزیه‌ی استاندارد می‌نویسیم.

مثال: عدد ۳۶۰ را به صورت تجزیه‌ی استاندارد می‌نویسیم.

۳۶۰	۲
۱۸۰	۲
۹۰	۲
۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

عدد ۳۶۰ را مطابق الگوی مقابل به طور متوالی بر مقسوم علیه‌های اول آن تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه ۳۶۰ حاصلضرب اعداد اول سمت راست هستند.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

تمرین در کلاس

عددهای ۱۲۰ و ۵۲۵ و ۴۷ را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

می‌دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخشپذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود که به اختصار با ب.م.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ب.م.م.م. چند عدد می‌توانیم آنها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال: ب.م.م.م. اعداد ۳۶ و ۲۲۵ و ۴۰۵ را تعیین می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 225 = 3^2 \times 5^2 \\ 405 = 3^4 \times 5 \end{array} \right. \text{هریک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. تنها عامل مشترک عدد ۳ است}$$

و کمترین توان آن ۲ است. پس ب.م.م.م. ۳^۲ است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م.م. خود بخشپذیرند.

ب. م.م اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به دست آورید.

می دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخشپذیر است را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می توانیم آنها را به صورت استاندارد به عامل های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل های موجود در این تجزیه ها با بزرگترین توان، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال: ک.م.م. اعداد $a = 2^3 \times 5^2$ و $b = 2 \times 5^3 \times 7^2$ و $c = 2^5 \times 5 \times 13$ را تعیین می کنیم.

حاصل ضرب همه ی عامل های مشترک و غیرمشترک a ، b و c با بیشترین توان را به دست می آوریم:

$$2^5 \times 5^3 \times 7^2 \times 13$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a ، b و c است و روشن است که بر a ، b و c بخش پذیر است.

۱. ک.م.م اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.

۲. می خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرشهای مربع شکل که اندازه ی ضلع آنها عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازه ی ضلع فرشها چه عددهایی می تواند باشد؟ ضلع فرشها چقدر باشد تا کمترین

تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد؟

۳. ب.م.م و ک.م.م هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲ و ۳ و ۵ هستند.

الف) $32a^2$, $16ab^2$, $8a^2b^3$ ب) $6x^2y$, $8xy^2z$, $10x^2y^2z^2$

فصل اول - نسخه دوم

در چندجمله‌ایها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش پذیری برقرار است. پس می‌توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

فعالیت

چندجمله‌ایهای $P(x) = 2x^3 - 16$ ، $Q(x) = 3x^2 - 12$ را در نظر بگیرید.

۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

۲- بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش پذیرند را بنویسید.

۳- کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و یا ک.م.م. دو چندجمله‌ای بود. بنا به تعریف:

بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش پذیرند را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بخش پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله‌ای به شکل مشابه انجام می‌شود.

فصل اول - نسخه دوم

مثال: ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله ایهای $P(x) = x^2 + 1$ و $Q(x) = x^2 - 1$ و $R(x) = 4x^2 - 4$ را تعیین می کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله ایها را تجزیه می کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م. و ک.م.م. اعداد گفته شد عمل می کنیم.

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$R(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x-1)(x+1)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه ها $x+1$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x+1$ ب.م.م. این سه چندجمله ای است.

عواملی که در این تجزیه های وجود دارند عبارتند از: $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x - 1$, $x + 1$, 4 و بزرگترین توان آنها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله ای عبارت است از:

$$4(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) = 4(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 4(x^4 - 1)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله ایها کمک زیادی به کوتاه تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارات های گویا می کند.

تمرین در کلاس

۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{1}{12} + \frac{5}{48} - \frac{1}{16}$$

۲. کسره های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{2x^2 - 3xy}{3(x-y)^2}$$

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$$

۳. حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^2-1}$$

۱- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه زنگ یک بار زده می شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آنها دوباره با هم زده شوند؟

۲- در دنباله های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$۱, ۷, ۱۳, \dots \quad ۴, ۷, ۱۰, \dots$$

۳- ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی

شده اند. حداقل تعداد شیشه ها کدام است؟ (گنجایش شیشه ها را عدد طبیعی فرض کنید.)

۴- حاصل هریک از عبارات های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

آ) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x^2}$

ب) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$

پ) $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1}$

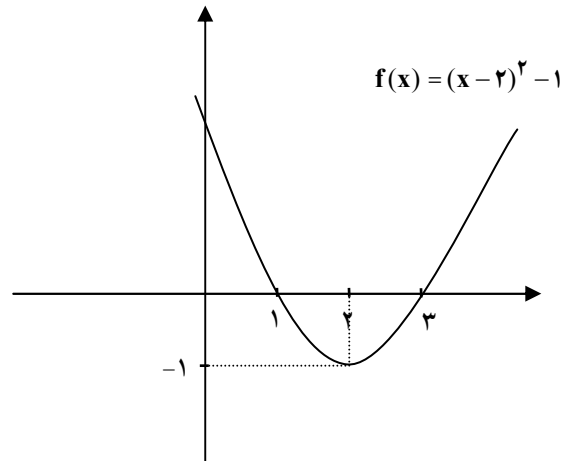
ت) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$

معادلات

در سالهای قبل با مفهوم معادله و حل معادله ی درجه ی اول و درجه ی دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید در حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱. نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ به شکل زیر است.

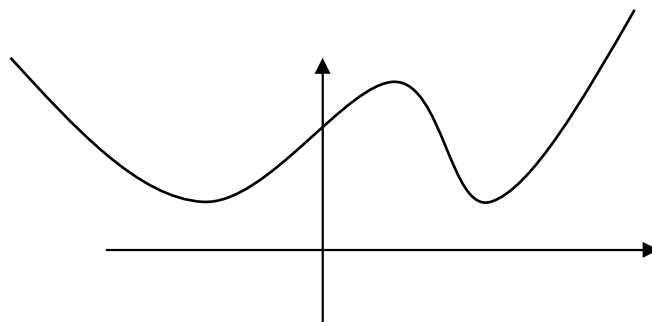


جوابهای معادله $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می کند؟ از

طریق نمودار $f(x)$ چگونه می توان در مورد جوابهای معادله $f(x) = 0$ اظهار نظر کرد؟

۲- نمودار تابعی مانند $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جوابهای معادله $g(x) = 0$ چه می توانید

بگویید؟



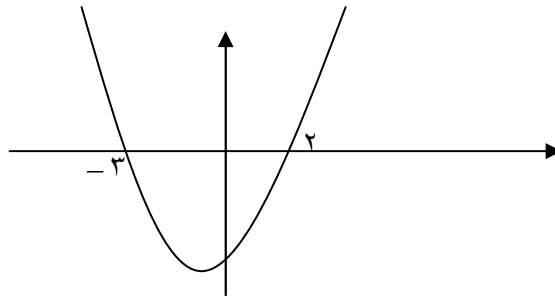
۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ توضیح دهید چرا معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ فقط یک

جواب دارد.

فصل اول - نسخه دوم

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f ، طول نقاط تلاقی نمودار با محور طول‌ها است.

مثال: اعداد ۲ و ۳- صفرهای تابع $f(x) = x^2 + x - 6$ می‌باشند و نمودار f در نقاط به طولهای ۲ و ۳- محور طول‌ها را قطع می‌کند.



نمودار توابعی که ضابطه آنها یک چندجمله‌ای درجه دوم است را **سه‌می** می‌نامند. سه‌می‌ها شکل‌های مشابهی دارند و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آنها بیشتر آشنا خواهید شد.

در سال‌های قبل دیدیم که برای یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ دارای دو جواب به شکل زیر است.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

در حالت $\Delta = 0$ داریم $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$. در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (دو گانه) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند،

$$\text{داریم } x' + x'' = -\frac{b}{a} \text{ و } x'x'' = \frac{c}{a}$$

حل یک مسئله

مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی متر و مساحت آن ۲۸ سانتی مترمربع

برای تعیین این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلعهای آن را با x' و x'' نشان می دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x'' = 28, x' + x'' = 11$$

x' و x'' ریشه های معادله درجه دوم $(x-x')(x-x'')$ هستند. از طرف دیگر

$$(x-x')(x-x'') = x^2 - (x'+x'')x + x'x'' = x^2 - 11x + 28$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جوابها معادله $x^2 - 11x + 28 = 0$ را حساب کنیم. با حل این معادله نتیجه می شود: $x' = 4$ و $x'' = 7$. به طور کلی:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ ، آنگاه α و β جوابهای معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مثال: معادله ی درجه ی دومی تشکیل دهید که جوابهای آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S = x' + x'' = 2 + 3 = 5$ و $P = x' \times x'' = 2 \times 3 = 6$ ، پس ۲ و ۳ جوابهای معادله ی

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ هستند.}$$

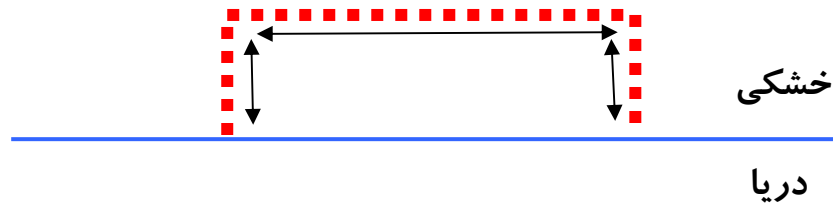
روش دوم: $(x-2)(x-3) = 0$ معادله ای است که مستقیماً دیده می شود ۲ و ۳ جوابهای آن هستند.

این یک معادله ی درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2 - 5x + 6 = 0$ در می آید.

ماکزیموم و مینیموم توابع درجه دوم

حل یک مسئله

بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل کنار دریا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟



برای فهمیدن درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این

زمین مستطیل شکل را با x نشان می دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{120-x}{2}$ خواهد بود. اگر

مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = x(60 - \frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{2} + 60x$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 120x) = -\frac{1}{2}[(x-60)^2 - 3600] = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول 60 متر بیشترین

مساحت ساخته می شود که برابر 1800 مترمربع خواهد بود.



تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$.

۱- درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

۲- اگر $a < 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳- اگر $a > 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت؟

از این فعالیت قضیه زیر به دست می آید.

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به کمترین مقدار (مینیمم) و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می رسد.

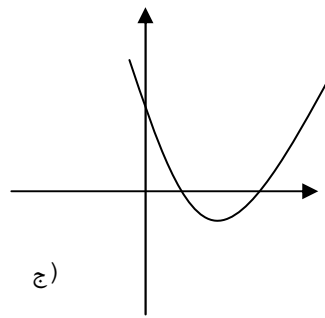
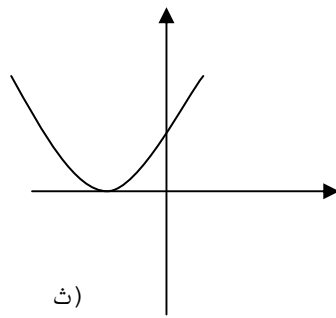
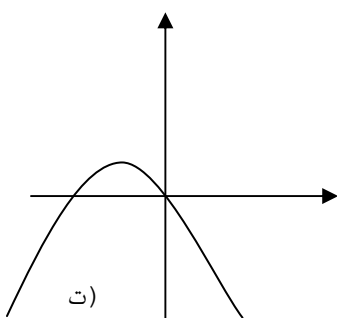
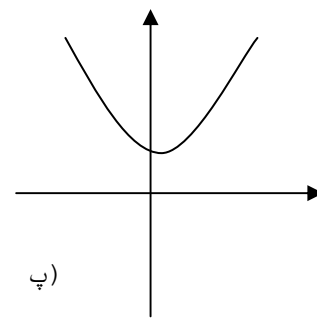
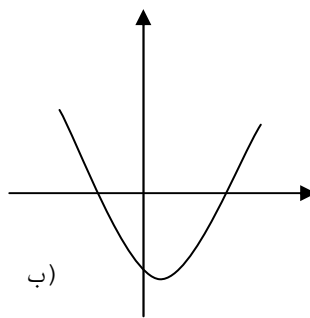
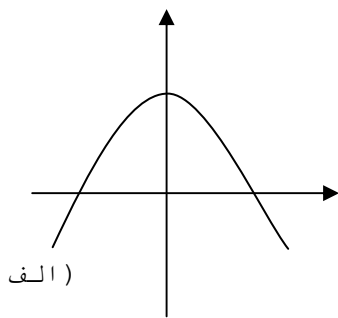
مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ را تعیین می کنیم.

به ازای $x = \frac{12}{6} = 2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2) = -7$ ، کمترین مقدار تابع برابر -7 می باشد.

تمرین در کلاس

۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $\frac{-1}{4}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

۲- در هر یک از شکل های زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



۳- نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

حل یک مسئله

یک معادله چندجمله ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ یک جواب آن

عباس: جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است چندجمله ای $(\sqrt{3} + \sqrt{2})x - 1$ را در نظر بگیریم.

معلم: در این چندجمله ای اعداد غیر صحیح بکار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن: ما چگونه می توانیم چنین معادله ای بسازیم؟

معلم: بهتر است اول در حالت ساده تری این مسئله را حل کنید. مثلاً معادله ای با ضرایب صحیح

بسازید که $\sqrt{2}$ یک جواب آن باشد.

عباس: ما قبلاً به چنین معادله ای برخورد کرده ایم. کافی است معادله $x^2 - 2 = 0$ را در نظر بگیریم.

معلم: این معادله را چگونه می توانید به دست آورید؟

عباس: کافی است در تساوی $x = \sqrt{2}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می شود $x^2 = 2$ و سپس

معادله $x^2 - 2 = 0$ به دست می آید.

معلم: بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جوابهای دیگری هم

دارد. آیا می توانید این روش را برای حل مسئله اصلی هم بکار برید؟

عباس: بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می دهیم $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. با به توان دو رساندن

طرفین این تساوی می توان نوشت $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. متأسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید

وجود دارند.

فصل اول - نسخه دوم

معلم: بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس: فکر می‌کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. به نظر می‌رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم: بله شما به جواب مسئله رسیده اید. البته این معادله جوابهای دیگری هم دارد و خوب است بقیه

ی جوابهای این معادله را هم به دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظر گرفتن $x^2 = z$ می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^2 - 10z + 1 = 0$. با حل این معادله خواهیم داشت: $z = 5 \pm 2\sqrt{6}$. حال با حل دو معادله‌ی $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ، $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ خواهیم داشت:

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

با همین روش جوابهای $x = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ برای معادله‌ی دیگر به دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد.

تمرین در کلاس

معادله‌ی $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید.

حل یک مسئله

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد که $a_n \neq 0$ و از روی آن چند جمله‌ای درجه n ، $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چند جمله‌ای وجود دارد؟ چند جمله‌ای $Q(x)$ را چند جمله‌ای وارون $P(x)$ می‌نامند.

فصل اول - نسخه دوم

یکی از دانش آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش آموزان مطرح کرد تا همه در باره آن فکر کنند و راه حل های خودشان را ارائه کنند.

در جلسه ی بعدی درس، معلم از دانش آموزان خواست راه حل های خودشان را ارائه کنند.

علی: به نظر من بهتر است ابتدا در حالت های خاص که ساده تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چندجمله ای های درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل یک مسئله می کند. با مشاهده ی مسئله در حالت های خاص می توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی: من توانستم حدس بزنم که چه رابطه ای بین ریشه های دو چندجمله ای وجود دارد ولی نتوانستم

اثباتی برای آن ارائه کنم. در حالت چندجمله ای های درجه اول مانند $P(x) = ax + b$ داریم $Q(x) = bx + a$ و ریشه های آنها به ترتیب $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{b}{a}$ می باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چندجمله ای های درجه ی دوم محاسبات پیچیده تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید: جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چندجمله ای درجه دوم خاصی که ریشه هایشان را می دانستم محاسبه کردم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله ای ساده مثل $P(x) = (x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه هایش را از قبل می دانستم. اگر آن را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x) = x^2 - x - 12$. بنابراین $Q(x) = -12x^2 - x + 1$ و ریشه های آن از دستور کلی معادله ی درجه ی دوم $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم: هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده اند. در هر دو روش این حدس پیش می آید که ریشه های دو چندجمله ای معکوس یکدیگرند. شما می توانید این حدس را در مثال های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می توانید این مطلب را برای یک چندجمله ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیقتری بیان کنید. مثلاً برای دو چندجمله ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ اگر r یک ریشه ی $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می شود؟

فصل اول - نسخه دوم

علی: پس باید از $P(r) = 0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه گیری امکانپذیر نخواهد بود.

معلم: لابد صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید: درست است صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0) = a \neq 0$.

معلم: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r) = 0$ حکم $Q\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ را به دست آورید.

عباس: پس فرض کنیم $P(r) = ar^2 + br + c = 0$ اکنون می خواهیم $Q\left(\frac{1}{r}\right)$ را به دست آوریم.

$$Q\left(\frac{1}{r}\right) = c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

معلم: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه ای از چندجمله ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ باشد آن گاه $P(r) = 0$ بنابراین:

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{r}\right) &= a_0 \left(\frac{1}{r}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{1}{r}\right) + a_n \\ &= \frac{1}{r^n} (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = \frac{1}{r^n} P(r) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه ای $Q(x)$ است.

علی: آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه ای از $Q(x)$ باشد آیا $P\left(\frac{1}{s}\right) = 0$ ؟

معلم: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می شود.

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌های خود را به دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس

با استفاده از فرمول ریشه‌های دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ را به دست آورید و نشان دهید ریشه‌های آنها عکس یکدیگرند.

مسائل

۱. در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲. صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = x^2 - 4x \quad \text{(الف)} \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{(ب)}$$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

$$2x^2 + x^2 + 3x = 0 \quad \text{(الف)} \quad \frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10 \quad \text{(ب)}$$

۴. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که:

(الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

(ب) ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

۵. مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

فصل اول - نسخه دوم

$$f(x) = 4 + 8x - x^2 \text{ (ب)}$$

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3 \text{ (الف)}$$

۶. اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که

ریشه‌های آن $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}$ باشد.

۷. بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی

$$5x^2 - 7x - 5 = 0 \text{ بحث کنید.}$$

۸. از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد سن من توان دوم سنی

خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹. (مسئله‌ای از کتاب جبر و مقابله خوارزمی) کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با

یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم،

برابر ۲۰ شود؟

۱۰. در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه

رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصل ضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می

کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده آن ۲۲ می‌شود آن دو عدد را پیدا کنید.

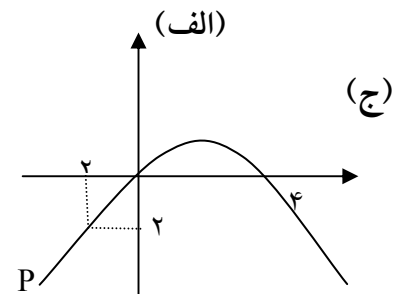
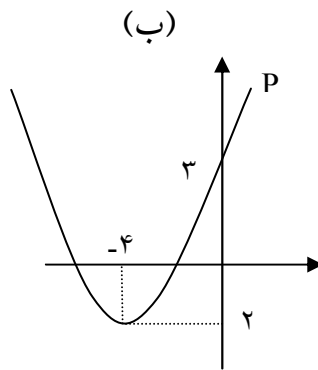
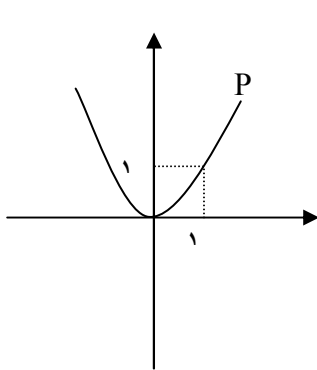
۱۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{(الف) } x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \text{ (ب) } \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \text{ (ج) } (4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

۱۲. کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

۱۳. در تابع درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً علامت $P(x)$ را

تعیین کنید ثانیاً ضرایب a و b و c مشخص کنید.



۱۴. محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دوکارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند؟

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولاً درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می کند. او امروز مسئله بالا را طرح کرد و به دانش آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آنها خواست راه حل خود را مطرح کنند.

زهرا: فکر می کنم مسئله با تشکیل یک معادله حل می شود. فرض می کنیم کارگر اول در x روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x + 15$ روز تمام می کند. باید فرض اول مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم، اما من نتوانستم این کار را انجام دهم.

خانم تقوی: این دو کارگر با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می دهند؟

دانش آموزان: معلوم است $\frac{1}{18}$ کار را.

خانم تقوی: حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می دهد و ببینید چگونه بین این نسبتها می توانید ارتباط برقرار کنید.

سارا: فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبتها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت:

فصل اول - نسخه دوم

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

و توضیح داد که $\frac{1}{x}$ میزان کار کارگر اول و $\frac{1}{x+15}$ میزان کار کارگر دوم است و مجموع آنها مجموع کار هر دو کارگر است که برابر $\frac{1}{18}$ است.

خانم تقوی: شما معادله مورد نظر را پیدا کردید و برای حل مسئله کافی است این معادله را حل کنید. برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم.

مینا: ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم منخرج کردن استفاده می کردیم این جا هم می توانیم از روش کلی هم منخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه را که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک منخرج هاست. که در این جا همان حاصل ضرب منخرج ها می شود.

$$\frac{x+15+x}{x(x+15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18(2x+15) = x^2+15x$$

$$\Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \Rightarrow x = 30, x = -9$$

جواب $x = -9$ قابل قبول نیست (چرا؟) و جواب مسئله ۳۰ روز است.

حل یک مسئله

در یک مغازه ی ماهی های تزئینی، ماهی های آب شور در محلولهای آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می شوند. به علت تازه کار بودن کارگرا، ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر

حالت اول: فرض می کنیم نمک به اندازه ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x+8$ کیلوگرم می شود و وزن کل محلول $x+200$ کیلو می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

فصل اول - نسخه دوم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله نتیجه می شود $x = \frac{600}{93}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۳۸۷ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.

حالت دوم: اگر نمک به اندازه‌ی کافی موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلو گرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله داریم $y = \frac{600}{7}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله که از واقعیت می‌آیند مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز قابل قبول نیستند.

بحث در کلاس

در حل مسئله محلول آب نمک، اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به محلول اضافه کنیم، چند کیلو گرم از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به هدف مورد نظر برسیم؟

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ را به دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x - 2 = 2(x - 1) \\ x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \\ 2x + 2 = 2(x + 1) \end{cases}$$

ک.م.م.مخرج ها $= 2(x - 1)(x + 1)$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} (x + 1)(2x + 3) - 5 \times 2 &= (x - 1)(2x - 3) \\ 2x^2 + 3x + 2x + 3 - 10 &= 2x^2 - 3x - 2x + 3 \\ 10x - 10 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

اما $x = 1$ مخرج کسر معادله را صفر می کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{t-1}{t+4} - \frac{2}{t-4} = \frac{7}{6} \quad (\text{الف})$$

مسائل

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1}$$

$$2) \frac{k}{2-k} + \frac{2}{k} = 5$$

$$3) 2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

$$4) \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$5) \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$$

$$6) \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$$

۷- معلم سوال کرد مجموعه جواب معادله $\frac{x+3}{x+3} = 1$ چیست؟ برخی از دانش آموزان گفتند: همه

اعداد. معلم گفت این جواب صحیح نمی باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸- آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

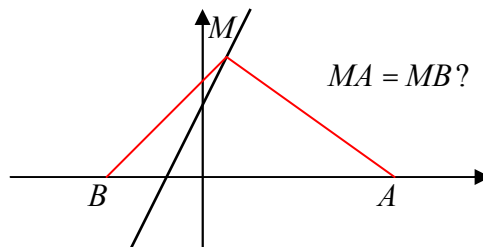
معادلات شامل عبارات گنگ

حل یک مسئله

نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

سجاد و صادق دو دانش آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.

سجاد: مناسب است برای درک بهتر مسئله شکلی رسم کنیم که مشخصات مسئله در آن دیده شود.



صادق: ما می‌توانیم نقطه دلخواهی روی خط $y = 2x + 1$ در نظر بگیریم و فاصله آن را تا A و B

حساب کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی این فاصله‌ها مساوی می‌شوند.

سجاد: بسیار خوب. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, 2a + 1)$ باشد.

صادق: همچنین باید داشته باشیم $MA = MB$ ، یعنی

$$MA = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+1-0)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a+1-0)^2} = MB$$

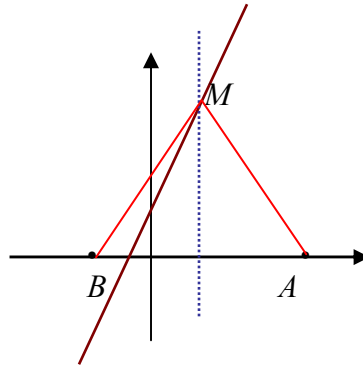
فصل اول - نسخه دوم

با به توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(a-3)^2 + (2a+1)^2 &= (a+1)^2 + (2a+1)^2 \\ a^2 - 6a + 9 &= a^2 + 2a + 1 \\ a &= 1\end{aligned}$$

سجاد: پس جواب مسئله نقطه $M(1, 3)$ است.

صادق: این مسئله را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند روی عمودمنصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمودمنصف AB است؛ از طرف دیگر M روی خط $y = 2x + 1$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.



برخی معادلات دارای عبارهای رادیکالی از مجهول هستند که آنها را **معادلات گنگ** می‌نامند. برای حل آنها با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله ای بدون عبارت گنگ به دست می‌آید که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله‌ی اصلی آزمایش شوند زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جوابهای

مثال: معادله‌ی $\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$ را حل می‌کنیم.

با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$15 + \sqrt{2x+80} = 25$$

$$\sqrt{2x+80} = 10$$

فصل اول - نسخه دوم

دوباره طرفین معادله‌ی اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت:

$$2x + 80 = 100 \Rightarrow x = 10$$

جواب به دست آمده را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{15 + \sqrt{20 + 80}} = \sqrt{15 + 10} = \sqrt{25} = 5$$

تساوی برقرار است و $x = 10$ جواب معادله می‌باشد.

مثال: آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x + \sqrt{x} = 6$ برقرار شود. یعنی

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$x = 36 + x^2 - 12x$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$x = 9, \quad x = 4$$

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اصلی دیده می‌شود، $x = 9$ نمی‌تواند مورد قبول واقع باشد و تنها

جواب معادله $x = 4$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} x = 9 : \quad & 9 + \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 6 \\ & 9 + 3 \stackrel{?}{=} 6 \\ & 12 = 6 \end{aligned}$$

×

$$\begin{aligned} x = 4 : \quad & 4 + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 6 \\ & 4 + 2 \stackrel{?}{=} 6 \\ & 6 = 6 \end{aligned}$$

✓

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادله‌ی اخیر در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{5q-1} + 3 = 0$ ب) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$ ج) $\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{2p+2}$

مسائل

۱. معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{1-x^2} = x$ ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$ ج) $2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$

۲. در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

الف) $V = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ، $k = ?$

ب) $F = \frac{1}{2\pi} \sqrt{LC}$ ، $L = ?$

ج) $I = \frac{nE}{R+nr}$ ، $n = ?$

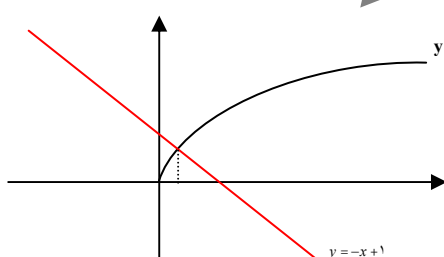
د) $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ ، $T_2 = ?$

ه) $A = p(1+i)^t$ ، $i = ?$

حل معادلات به روش هندسی

تا کنون با حل انواعی از معادلات با روشهای جبری آشنا شده ایم. در اینجا می‌خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارند. در این روش مقدر تقریبی جوابها و تعداد جوابها آسانتر مشخص می‌شوند. حتی در برخی مثالها حل جبری امکانپذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکانپذیر است.

فعالیت



نمودار دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = -x + 1$ در روبرو رسم شده است.

فصل اول - نسخه دوم

۱. اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، نشان دهید a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است.

۲. برعکس اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است، آنگاه a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟

۳. از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x}=-x+1$ فقط یک جواب دارد که درفاصله $[0,1]$ قرار دارد.

۴. مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x}=-x+1$ چیست؟

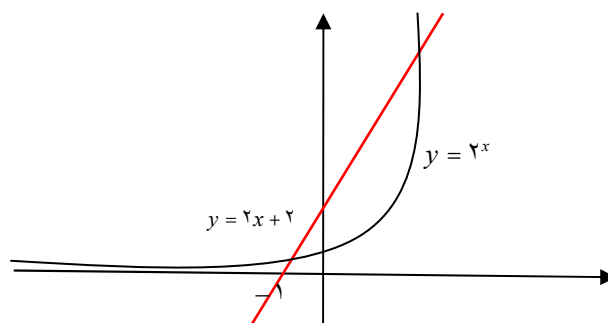
به کمک فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است

این شیوه ی حل معادلات را که از طریق آن تعداد جوابها و مقدار تقریبی جوابها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می نامند.

مثال: معادله $2^x = 2x + 2$ را به روش هندسی حل می کنیم.

کافی است نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2x + 2$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به دست آوریم.

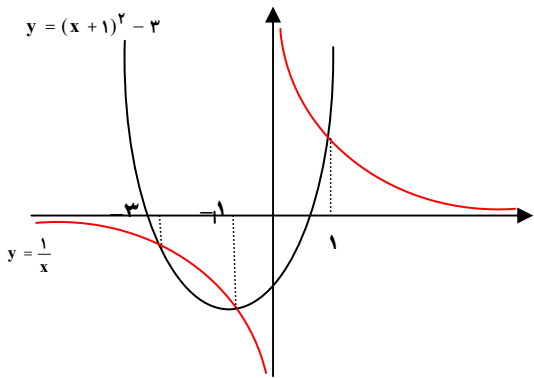


از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین -1 و 0 و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد.

فصل اول - نسخه دوم

جواب مثبت این معادله ۳ است ولی جواب دیگر را به طور دقیق نمی توانیم به دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سالهای قبل آموخته اید می توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به دست آورید.

مثال: تعداد جوابهای معادله $y = \frac{1}{x} = x^2 + 2x - 2$ را از طریق هندسی می یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جوابهای معادله را به طور دقیق تعیین می کنیم.



نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را می شناسید. توجه داریم که این

تابع در $x = 0$ تعریف نمی شود و شامل دو شاخه در ربع

اول و سوم خواهد شد. سپس با استفاده از رسم تابع

$y = x^2$ و انتقال نمودار آن، تابع $y = x^2 + 2x - 2$ را

رسم می کنیم. توجه داریم که

$$y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$

از روی شکل می توان حدس زد که یکی از جوابها ۱ خواهد شد و با جاگذاری $x = 1$ در معادله رستی این حدس تایید می شود. شکل نشان می دهد که این معادله دو جواب دیگر هم دارد که منفی هستند. اگر مقدار دقیق جوابها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به صورت $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ می نویسیم و چون چندجمله ای $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ بر $x - 1$ بخش پذیر خواهد شد، داریم:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = 1 \text{ در نتیجه}$$

تمرین در کلاس

۱. معادله $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x + 1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جوابهای به دست آمده را مقایسه کنید.

۲. تعداد جوابهای معادله $x - 2 \sin x = 0$ را مشخص کنید.

۳. از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x} = x + 1$ جواب ندارد.

مسائل

۱. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جوابهای دقیق را با روش جبری به دست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt{x-1} = x-3 \quad \text{ب) } \frac{2x-1}{x} = 5-x$$

$$\text{ج) } 2^x = x^2 \quad \text{د) } \sqrt{x} + 2x = x^2 + 2$$

۵. به روش نقطه یابی نمودار تابع $y = x^x$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع

$y = (x+1)^x$ را رسم کنید و جوابهای معادله $(x+1)^x = -3x+5$ را با روش هندسی به

طور تقریبی دست آورید.

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

در سالهای قبل با مفهوم قدرمطلق و تابع قدرمطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a که آن را با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر a مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق a ، برابر خود عدد a است و اگر a منفی باشد، قدرمطلق a برابر قرینه a است. این مطلب را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱- حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $| -2 - (-3) |$

ب) $| 1 - \sqrt{2} |$

ج) $| \sqrt{3} - \sqrt{5} |$

۲- عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

فصل اول - نسخه دوم

الف) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

ب) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$

۳- عبارت «فاصله‌ی بین دو عدد x و a کمتر از $0/01$ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

با توجه به تعریف قدرمطلق می‌توان عبارات قدرمطلق را ساده نمود.

مثال: نمودار $y = |x-2| + 1$ را رسم می‌کنیم.

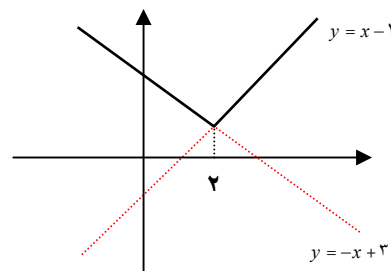
با رسم نمودار این تابع از طریق انتقال‌های مناسب نمودار $y = |x|$ آشنا هستید، ولی در اینجا می‌خواهیم

با استفاده از مفهوم قدرمطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم.

ابتدا جدول تعیین علامت $x-2$ را تشکیل می‌دهیم و از طریق آن علامت $x-2$ را تشخیص می‌دهیم.

x	۲		
$x-2$	-	۰	+
$ x-2 $	$-x+2$		$x-2$
$ x-2 +1$	$-x+3$		$x-1$

$$y = |x-2| + 1 = \begin{cases} -x+3 & x \leq 2 \\ x-1 & 2 < x \end{cases}$$



تمرین در کلاس

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

فصل اول - نسخه دوم

۱- با توجه به این که $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt{b^2} = |b|$ نشان دهید $|ab| = |a||b|$

۲- با فرض $b \neq 0$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید: $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

۳- اگر $|x| \leq c$ ($c \geq 0$) با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می توان نتیجه گرفت:

$$-c \leq x \leq c$$

$$|x| \leq c \Rightarrow |x|^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 - c^2 \leq 0 \Rightarrow (x-c)(x+c) \leq 0$$

x	$-c$	c
$(x-c)(x+c)$	+	-

۴- اگر $c \geq 0$ و $-c \leq a \leq c$ ثابت کنید $|a| \leq c$.

مسائل

۱- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $|a| = |-a|$ و $|a|^2 = a^2$

۲- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $-|a| \leq a \leq |a|$

۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می نامند.)

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $|y| \leq |x| + |y - x|$ و نتیجه بگیرید:

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

۵- اگر $c > 0$ و $|a| > c$ نشان دهید $a > c$ یا $a < -c$.

۶- به کمک تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق، ضابطه های توابع زیر را بدون استفاده از

قدر مطلق بنویسید.

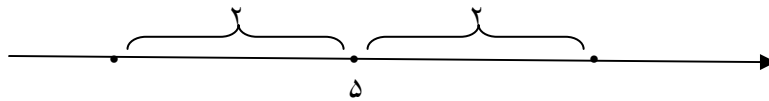
(الف) $f(x) = x|x|$ (ب) $f(x) = |x+1| - 2$ (ج) $y = |x-1| + |x+2|$

معادلات قدر مطلق

حل یک مسئله

فاصله چه نقاطی روی محور اعداد از نقطه متناظر ۵ برابر ۲

برای حل این مسئله ابتدا شکل زیر را رسم می کنیم.



اگر طول نقطه جواب را x بنامیم شرط مسئله به معنای آن است که $|x-2|=5$. این یک معادله بر حسب مجهول x است. شرط $|x-2|=5$ به معنای آن است که $x-2=5$ یا $x-2=-5$. جوابهای هر کدام از این دو معادله جواب معادله $|x-2|=5$ می باشند. در نتیجه $x=7$ و $x=-3$ دو جواب آن معادله هستند.

به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

جوابهای یک معادله به صورت $|f(x)| = |g(x)|$ همان جوابهای دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدر مطلق هستند **معادلات**

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدر مطلق و حذف علامت قدر مطلق معادله ساده شده را حل می کنیم.

مثال: معادله $|2x-3|=|x|$ را حل می کنیم. جوابهای این معادله همان جوابهای دو معادله $2x-3 = \pm x$ هستند که نتیجه می شود ۳ و ۱ جوابهای آن هستند.

مثال: معادله $|x+1|=4+2x$ را حل می کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم: $0 \leq 4+2x$ در نتیجه $x \geq -2$. حال دو معادله $x+1 = \pm(4+2x)$ حل می کنیم.

فصل اول - نسخه دوم

$$x + 1 = 4 + 2x \Rightarrow x = -3$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $x \geq -2$ -.

$$x + 1 = -(4 + 2x) \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

این جواب قابل قبول است.

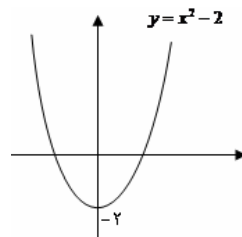
تمرین در کلاس

معادلات قدرمطلقى زیر را حل کنید.

الف) $|x-1|=5$ ب) $|2x-1|+|x|=7$ ج) $|x|=-4$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 - 2$ آمده است.



۱- با توجه به علامت $x^2 - 2$ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ را رسم کنید.

۲- نمودار $y = 2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ را مشخص کنید

۳- جواب‌های معادله‌ی $|x^2 - 2| = 2$ را با استفاده از بند ۲ به طور تقریبی تعیین کنید.

۴- به روش جبری معادله‌ی $|x^2 - 2| = 2$ را حل کرده و با جواب‌های به دست آمده از در بند ۳

مقایسه کنید.

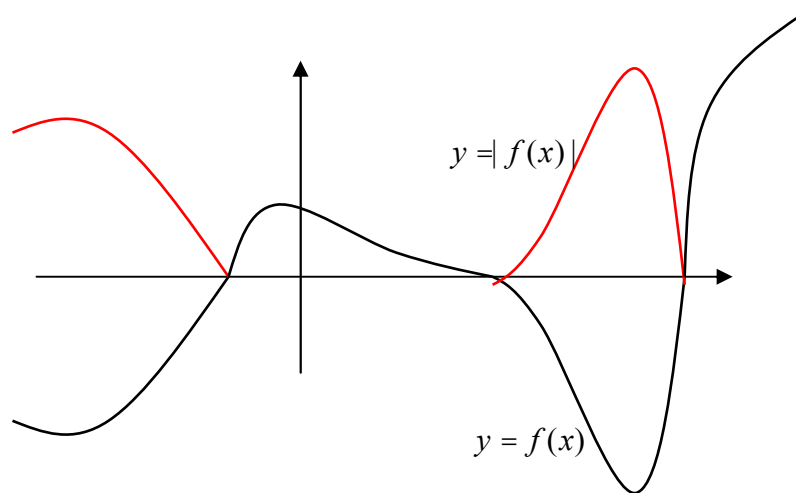
با توجه به تجربه بالا در رسم نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ می‌توانید رابطه بین نمودار دو تابع $f(x)$ و

$|f(x)|$ را به دست آورید.

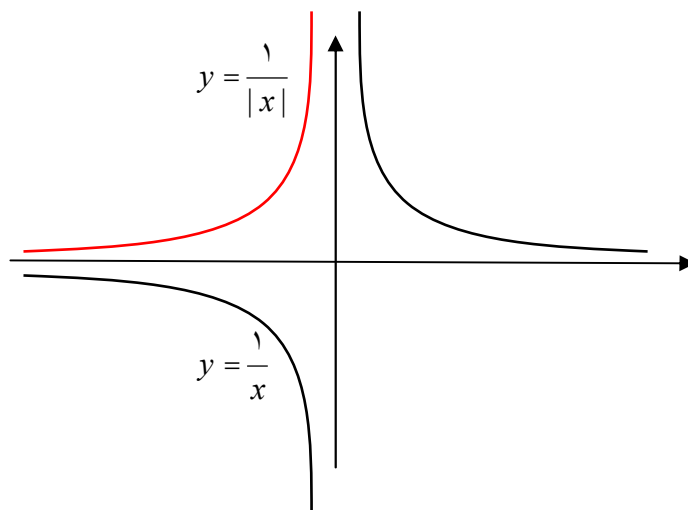
فصل اول - نسخه دوم

در بازه هایی که نمودار $f(x)$ بالای محور x ها است $f(x)$ مثبت است و $|f(x)| = f(x)$. یعنی در این بازه ها نمودار $f(x)$ و $|f(x)|$ بر هم منطبق است. اما در بازه هایی که نمودار $f(x)$ پایین محور x ها است $f(x)$ منفی است و $|f(x)| = -f(x)$. یعنی در این بازه ها نمودار $|f(x)|$ تصویر

آینه ای نمودار $f(x)$ است
 برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x ها است تصویر آینه ای نمودار $f(x)$ را رسم کنیم.



مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{|x|}$ را رسم می کنیم.

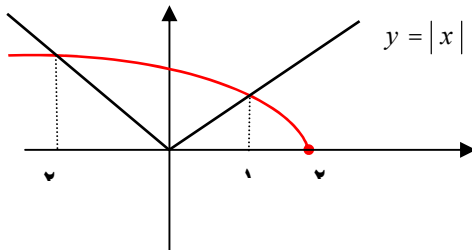


مثال: به روش جبری و نموداری (هندسی) معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ را حل می کنیم.

فصل اول - نسخه دوم

در روش جبری با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2 = 2 - x$ در نتیجه $x^2 + x - 2 = 0$ که جواب‌های آن $x = -2$, $x = 1$ هستند که هر دو در معادله اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

در روش هندسی نمودارهای توابع $y = |x|$ و $y = \sqrt{2-x}$ را رسم می‌کنیم. طولهای محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

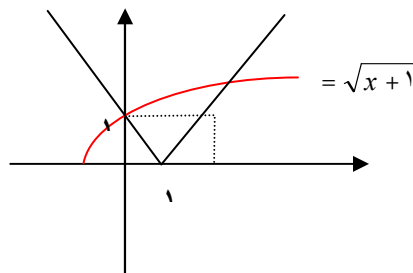


تمرین در کلاس

۱. به روش هندسی جوابهای معادله $|\sin x| = \frac{1}{2}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.

۲. معادله $|x^2 - 1| = x^2 - |x|$ را با روش هندسی حل کنید.

۳. در شکل زیر نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ و یک تابع قدرمطلق که نمودار آن نسبت به خط $x = 1$ متقارن است دیده می‌شود. معادله ای که جوابهای آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به روش جبری آن را حل کنید.



مسائل

۱- هریک از معادلات قدرمطلق زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را مشخص کنید.

$$\text{الف) } |2t - 1| - 3 = 0 \quad \text{ب) } |y^2 - 2| = 7$$

$$\text{ج) } |2x - 3| = 3 - 2x$$

۲- نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = 3$ معادله به دست آمده را با روش

هندسی و جبری حل کنید.

$$y = x + \frac{x}{|x|} \quad (\text{ج})$$

$$y = |x| + |1-x| \quad (\text{ب})$$

$$y = |2x-4| \quad (\text{الف})$$

نامعادلات قدرمطلقى

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله ایها و استفاده از آن در حل نامعادله های درجهی دوم آشنا شدید. هر نامعادلهی درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی ها می توان حل نمود.

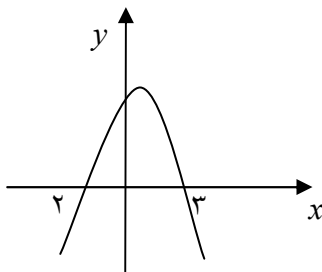
تمرین در کلاس

۱- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

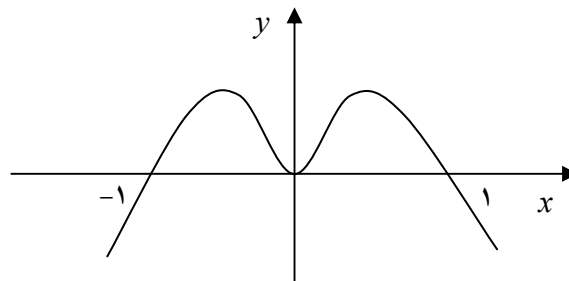
$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad (\text{الف}) \quad (1+x^2)(1-x^2) \leq 0 \quad (\text{ب})$$

$$1 + \frac{1}{x} < x \quad (\text{د}) \quad (1-x)(x+2) > 2x^2 - 1 \quad (\text{ج})$$

۲- در هر یک از حالت های زیر نمودار تابعی، مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادلهی داده شده را مشخص کنید.



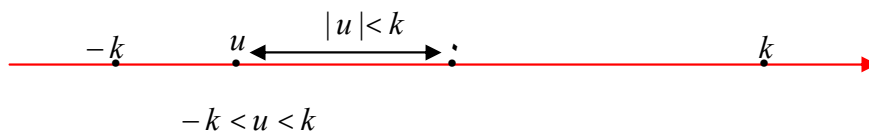
$$P(x) \geq 0$$



$$P(x) < 0$$

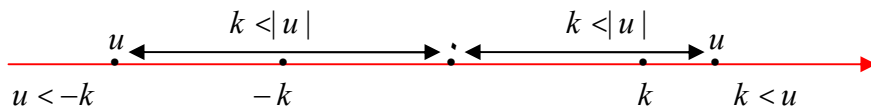
نامعادلاتی که دارای عبارتهای قدرمطلقى هستند، نامعادلات قدرمطلقى می نامند. برای حل این گونه نامعادلات عموماً از دو خاصیت مهم قدر مطلق استفاده می کنند.

اگر k عددی مثبت باشد، نامساوی $|u| \leq k$ معادل با آن است با $-k \leq u \leq k$.



فصل اول - نسخه دوم

و نامساوی $|u| \geq k$ معادل است با آن که $u \geq k$ یا $-u \geq k$.



مثال: نامعادله $|2x-1| \leq 7$ را حل می کنیم.

$$|2x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$$

مجموعه جواب بازه $[-3, 4]$ می باشد.

مثال: نامعادله $|6-3x| \geq 5$ را حل می کنیم.

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جوابهای دو نامعادله $6-3x \geq 5$ و $-(6-3x) \geq 5$

است. مجموعه جواب اولی بازه $(-\infty, \frac{1}{3}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{11}{3}, \infty)$ است و اجتماع این دو

بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

مثال: نامعادله $|2x+1| \geq 3$ را حل می کنیم.

این نامعادله را می توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می توانیم استفاده کنیم. با

توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می رسانیم و نامعادله را حل می کنیم.

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 &\geq 9 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 9 \Rightarrow 4x^2 + 4x - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \end{aligned}$$

برای حل نامعادله ی اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می کنیم.

x		-2		1	
$P = (x+2)(x-1)$		+	-	+	
			جواب		
					جواب

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

تمرین در کلاس

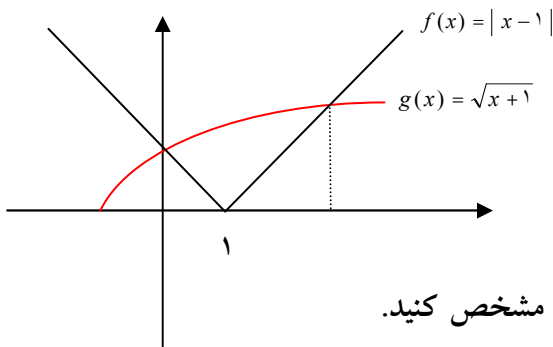
مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $|x-1| \leq \sqrt{x+1}$ ب) $|2-3x| > 5$

حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

فعالیت

در شکل زیر نمودار توابع $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

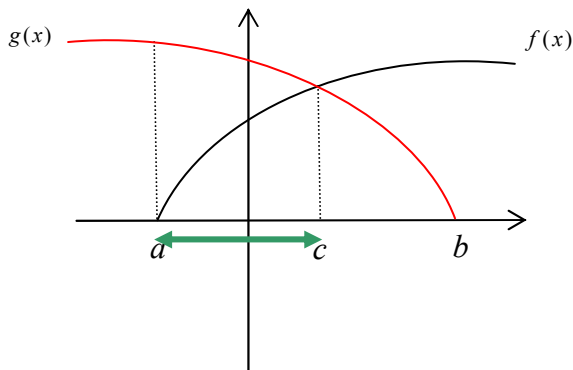


- ۱- مجموعه ی نقاط x که $f(x) \leq g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.
- ۲- مجموعه ی نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد را مشخص کنید.
- ۳- این دو مجموعه چه رابطه ای با هم دارند؟

یک نامعادله ی دلخواه را می توان به شکل $f(x) \leq g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد.

اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر

نمودار g قرار می گیرد.



برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادله ی

$f(x) < g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از

دامنه مشترک دو تابع را مشخص می کنیم که عرض نقاط تابع f از عرض نقاط تابع g کمتر باشد. در شکل بالا دامنه ی مشترک دو تابع $[a, b]$ می باشد. فقط در بازه ی (a, c) ، عرض نقاط منحنی f از عرض نقاط منحنی g کمتر است، پس جواب نامعادله بازه ی (a, c) می باشد.

فصل اول - نسخه دوم

مثال: نامعادله $|x+1| < x^2 - 1$ را با استفاده از روش نموداری

(هندسی) حل می کنیم. نمودار توابع $y_1 = |x+1|$ و $y_2 = x^2 - 1$

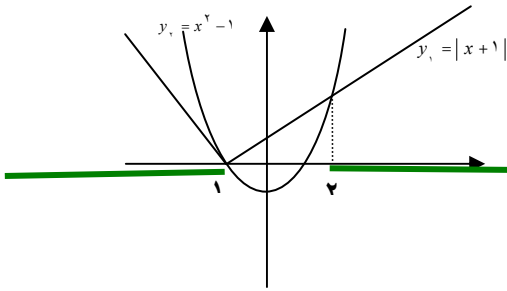
را رسم می کنیم.

باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار y_1 زیر

نمودار y_2 واقع شده باشد.

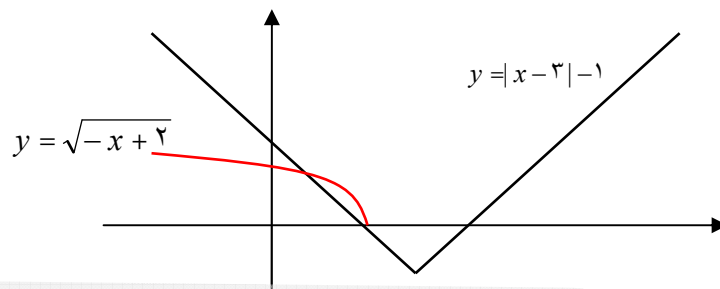
اجتماع دو بازه $(-\infty, -1)$ و $(2, \infty)$ مجموعه جواب نامعادله

است.



تمرین در کلاس

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادله $\sqrt{-x+2} \geq |x-3| - 1$ را حل کنید.



مسائل

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

$$1) x^2 - 2x^2 + x \geq 0 \quad 2) \frac{2x-1}{x} > 1 \quad 3) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2 \quad 4) |x-2| \leq x$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب به دست آورید.

$$5) x^2 \leq 2^x \quad 6) \sqrt{x-1} < |x-1| \quad 7) \frac{1}{x} < \sqrt{x}$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی یا جبری حل کنید.

$$8) x+1 < |x| \quad 9) |x^2-1| \leq |x+1| \quad 10) |x| + |x-1| \leq 5$$