

فصل دوم

تابع

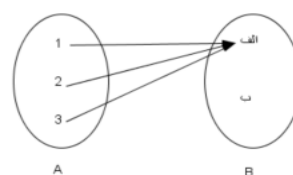
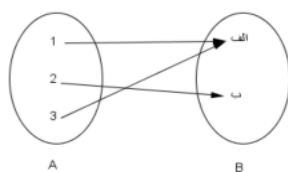
۱. تابع؛ یادآوری و تکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۶. تابع یک به یک و تابع وارون
۷. توابع چند جمله ای و توابع متناوب
۸. توابع پله ای تابع جزء صحیح

تابع: یادآوری و تکمیل

در سال گذشته با مفهوم تابع و برخی از انواع آن و نیز کاربردهایی از تابع آشنا شدید. همان گونه که دیدید یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می دهد. در اینجا تعریف تابع را با دقت بیشتری توضیح می دهیم.

تمرین در کلاس

فرض کنید محصولات یک کارخانه از نظر کیفیت در دو نوع "الف" و "ب" دسته بندی شوند.
 الف). چرا رابطه ای که به هر محصول، کیفیت آن را نسبت می دهد یک تابع است؟
 ب). فرض کنید سه محصول ۱ و ۲ و ۳ از تولیدات این کارخانه را اختیار کرده ایم. در زیر دو تا از توابعی که بین محصولات و کیفیت آن می تواند برقرار شود را نشان داده ایم.

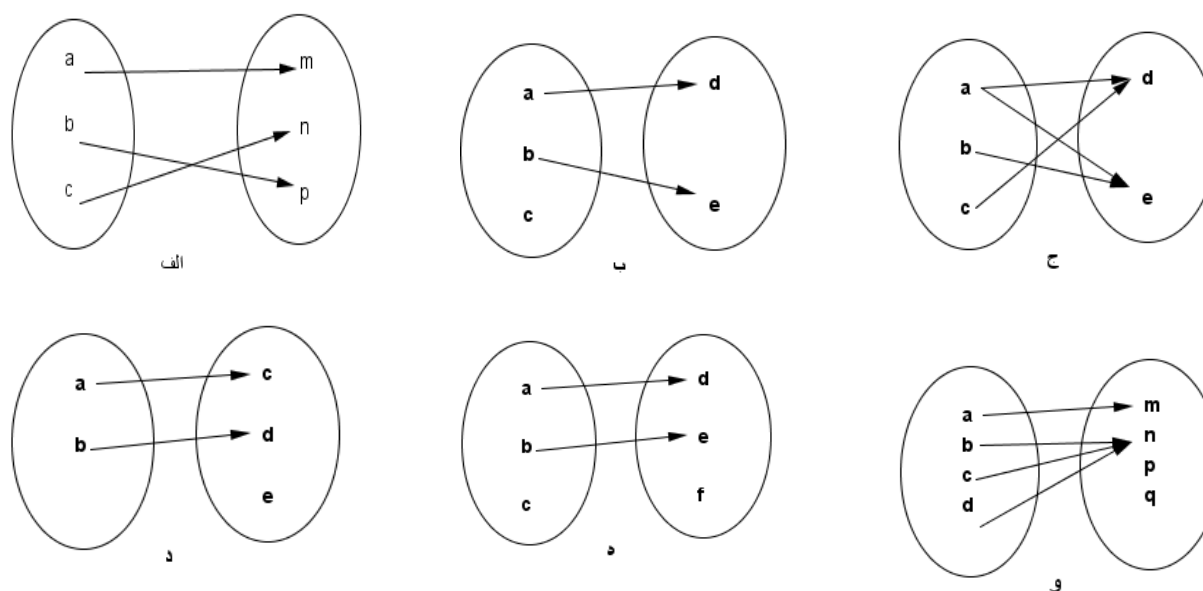


بردهای این دو تابع با هم چه تفاوتی دارند؟
 ج). همه توابع ممکن از A به B را با نمودار ون نشان دهید. در کدامیک از این توابع برد تابع همان مجموعه B می شود؟

از تعریف تابع نتیجه می شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد،
 الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.
 ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.

تمرین در کلاس

کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می کنند؟



اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه ای از همدامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.

فعالیت

۱. جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = 4x + 1$	$t(x) = x - 2$	$s(x) = x - 2$
دامنه	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی منفی	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[2, 3]$
برد					

۲. شباهتها و تفاوتهای این توابع را مشخص کنید.

به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می نویسیم: $f: A \longrightarrow B$
این نمادگذاری نشان می دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این

فصل دوم - نسخه دوم

نمادگذاری مشخص نمی شود و جداگانه باید ارائه شود. به طور مثال تابع g داده شده در فعالیت بالا را می توان به یکی از صورت های زیر نمایش داد:

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & g: R^- \rightarrow R^+ \\ \text{یا} & \\ \text{ب)} & g: R^- \rightarrow R \\ & g(x) = x^2 \end{array}$$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی (R^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (R^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می توان نوشت.

هر تابعی با ارائه سه ویژگی زیر مشخص می شود:

۱. دامنه
۲. هم دامنه
۳. دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای همدامنه را نشان می دهد

هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان باشد، آن را یک ضابطه جبری می نامیم.

مثال: همه توابع داده شده در فعالیت قبل دارای ضابطه جبری هستند. توجه داشته باشید که ضابطه یک تابع مشخص نمی کند که دامنه آن تابع چه باید باشد و دامنه تابع مستقلا باید ارائه شود.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ را می توانیم با دامنه $[0, 1]$ در نظر بگیریم و مقادیرهای آن نیز در اعداد مثبت می باشند، در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$\begin{array}{l} f: [0, 1] \longrightarrow (0, \infty) \\ f(x) = \sqrt{2-x} \end{array}$$

برد این تابع مجموعه $[1, \sqrt{2}]$ است.

موارد زیادی پیش می آید که توابع را صرفا با ارائه ضابطه معرفی می کنند و اشاره ای به دامنه نمی شود در این موارد **طبق قرارداد** دامنه تابع، بزرگترین مجموعه ای است که ضابطه ارائه شده، روی آن مجموعه

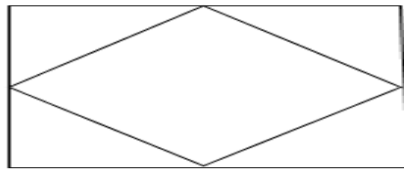
فصل دوم - نسخه دوم

تعریف شده است.

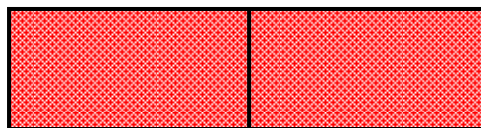
مثال: اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ به عنوان تابع ارائه شده باشد و مستقیماً دامنه ارائه نشده باشد، طبق قرارداد دامنه آن بازه $[-2, 2]$ است. زیرا این بازه بزرگترین مجموعه ای است که ضابطه $\sqrt{4-x^2}$ روی آن تعریف شده است. همچنین دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ بازه $[-\infty, 2]$ است.

مسائل

- ۱- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟
۳. تابعی مثال بزنید که دامنه آن $[-2, +\infty)$ باشد.
۴. دو تابع مانند f و g مثال بزنید که دامنه هر دو برابر $[2, 5]$ و برد هر دو $[0, 4]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.
۵. در مستطیلی به عرض W و محیط 40 متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید. همچنین دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



۶. اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.
۷. با ۱۵۰ متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸. توابع زیر را رسم کنید.

ا) $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 3x - 1$

ب) $g: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(x) = |x|$

فصل دوم - نسخه دوم

۹. مساحت مثلث قائم الزاویه ای 25 سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) به دست آورید.

۱۰. بیشترین مقدار تابع $f(x) = 230 + 20x - \frac{1}{2}x^2$ را به دست آورید.

۱۱. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(2x) = 2f(x)$ ب) $g(2x) = 2g(x)$

ج) $f(x+2) = f(x) + 2$ د) $g(x+2) = g(x) + 2$

تساوی دو تابع

آیا تا به حال با این مسئله مواجه شده اید که چه وقت دو تابع را مساوی می دانیم؟ برای مثال آیا دو تابع

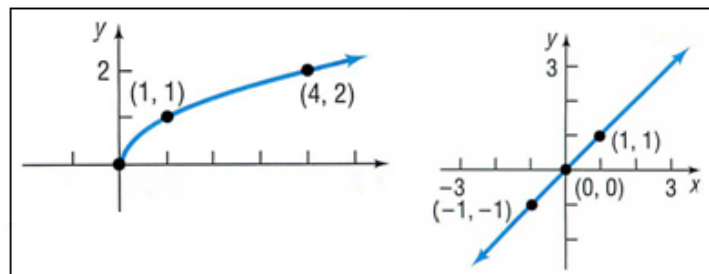
$f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^2}{x}$ با هم مساویند؟ اگر نمودار این دو تابع را رسم کنیم متوجه می شویم از

هر نظر بر هم منطبقند غیر از آن که تابع g در صفر تعریف نشده است. همین تفاوت نشان دهنده آن است که این دو تابع دامنه یکسانی ندارند، پس نمی توانند مساوی باشند.

با توجه به ویژگی های مشخص کننده یک تابع، دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن ها دقیقاً بر هم منطبق باشند. به عبارت دیگر هیچ نقطه ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد ولی روی دیگری واقع نباشد.

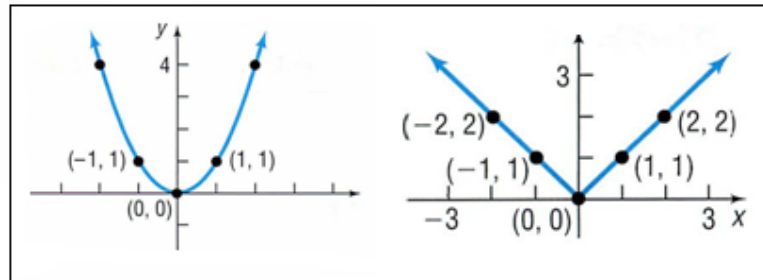
باتوجه به این تعریف، اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج های مرتب داده شده باشند هنگامی با هم برابرند که مجموعه های زوج های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

مثال: دو تابع که نمودار آنها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



به روشنی دیده می شود که این نمودارها یکی نیستند و حتی دامنه و برد این دو تابع با هم فرق می کنند.

مثال: دو تابع که نمودار آنها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



اگرچه دامنه و برد این دو تابع مساوی هستند، ولی نمودارهای این دو تابع با هم تفاوت دارند که نشان می دهد ضابطه آنها با هم فرق می کنند. توجه داشته باشید که اگر دو تابع دارای دامنه ها و بردهای یکسان باشند، لزوماً با هم برابر نیستند.

دو تابع f و g را مساوی نامیم هرگاه:
 ا) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.
 ب) برای هر x از دامنه f (یا g) $f(x) = g(x)$



در کدام سطر دو تابع داده شده با هم برابرند؟

آ) $f = \{(1, 2), (5, 9)\}$	$g = \{(1, 5), (2, 9)\}$
ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$
ج) $f: [1, 2] \rightarrow [1, 4]$ $f(x) = x^2$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$
د) $f = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$	$g = \{(e, f), (a, b), (c, d)\}$
ه) $f(x) = x + 1$	$g(x) = \frac{2x + 2}{2}$
و) $f(x) = \frac{\tan x}{\tan x}$	$g(x) = 1$
ز) $f(x) = \tan x$	$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
ح) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	$g(x) = x + 2$

فعالیت

یک شرکت حمل و نقل کالا برای حمل هر کیلو گرم کالا، در صورتی که وزن کل از ۲ تن کمتر باشد، دو تومان کرایه دریافت می کند، اگر وزن کالا حداقل ۲ تن ولی از ۳ تن کمتر باشد، شرکت به ازای هر کیلو گرم ۳ تومان و در صورتی که وزن کالا لااقل ۳ تن و حداکثر ۵ تن باشد، شرکت برای هر کیلو گرم ۴ تومان دریافت می کند.

(أ) کرایه حمل کالایی که ۲/۵ تن وزن دارد چقدر است؟

(ب) جدول زیر را کامل کنید:

وزن کالا x	کرایه حمل
$0 \leq x < 2000$	$2x$
.....	
.....	

(ت) این جدول تابعی را مشخص می کند. نمودار این تابع را با انتخاب مقیاس مناسب رسم کنید.

(د) اگر این تابع را f بنامیم با استفاده از (ب) ضابطه تابع را به طور کامل بنویسید.

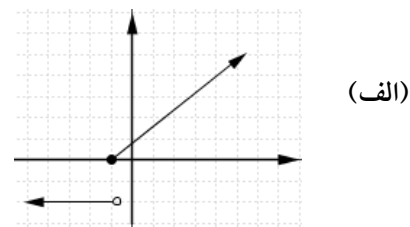
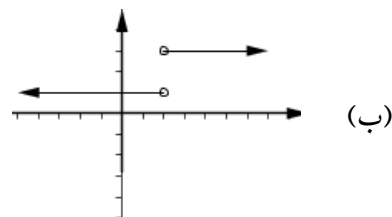
$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 2000 \\ \text{-----} & 2000 \leq x < 3000 \\ \text{-----} & 3000 \leq x \leq 5000 \end{cases}$$

توابعی که بخشهای مختلف دامنه آن با ضابطه های مختلف تعریف می شوند توابع چند ضابطه ای می نامند. قبلاً با نمونه هایی از این توابع برخورد داشته اید. برای مثال تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ یک تابع چند ضابطه ای است که می توان آن را به شکل زیر نوشت.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱. در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه های آنها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.



فصل دوم - نسخه دوم

۱. نمودار توابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & x \leq 4 \\ 2x & 4 < x \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2+x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -2x-3 & x < 1 \\ x-4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x+2 & 2 < x \end{cases}$$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای ۲ متغیر مانند x, y هستند، یک رابطه را نشان می دهند. برخی از این روابط، ضابطه تابعی را معلوم می کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می شوند اما توجه داشته باشید این طور نیست که یک معادله دو متغیره برحسب x, y حتماً ضابطه یک تابع را نشان بدهد.

مثال: معادله $x^2 + y = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان می دهد. در این گونه موارد مناسب است که معادله را برحسب y حل کنیم.

$$x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

می بینیم که برای هر مقدار دلخواه x دقیقاً یک مقدار برای y بدست می آید و در نتیجه y به صورت تابعی از x به دست می آید.

مثال: معادله $-x + y^2 = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان نمی دهد. زیرا با حل این معادله و با یافتن y بر حسب x مقدار یکسانی برای y به دست نمی آید.

$$-x + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 + x \Rightarrow y = \pm \sqrt{1+x}$$

برای مثال به ازای $x = 8$ داریم $y = \pm 3$ یعنی زوج های مرتب $(8, 3)$ و $(8, -3)$ روی نمودار این معادله قرار دارند. بنابراین این معادله نمی تواند ضابطه یک تابع را نشان دهد (چرا؟).

مسائل

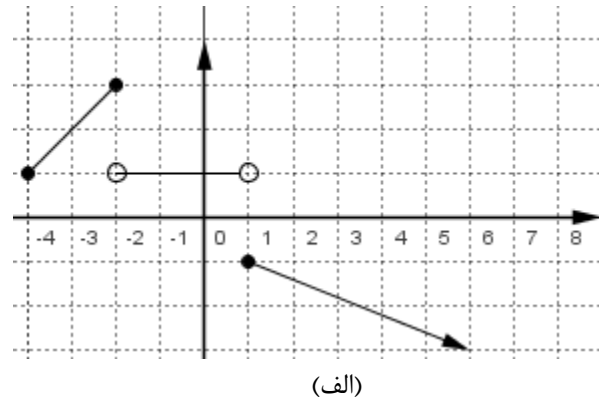
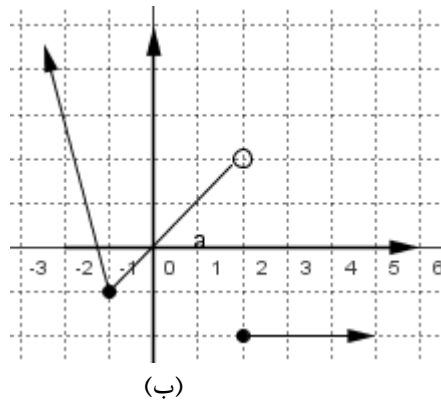
۱- تابع $f(x) = |x+1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چندضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 3 & 2 < x \end{cases} \quad g(x) = |x^2 - 4|$$

فصل دوم - نسخه دوم

۳- دامنه و برد هر یک از توابع چندضابطه ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



۴- اگر

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & 4 < x \end{cases}$$

مقدارهای $f(6)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۵- تابعی چندضابطه ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f = [-3, 5]$ و برد $f = [-2, 7]$

ب) $f(0) = 3$

ج) f یک به یک نباشد.

۶- کدامیک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می کند.

ا) $x^2 + y^2 = 25$

د) $x = |y| + 1$

ه) $y^2 = x^2$

ب) $y = \begin{cases} x + 2 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

و) $2x + 2y = 12$

ج) $y = |x| + 1$

ز) $x = 1$

۷- تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.

فصل دوم - نسخه دوم

ه) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه -3 قطع می کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۸- آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ با هم مساویند؟

۹- کدامیک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

آ) $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ب) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

ج) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = x + 3$

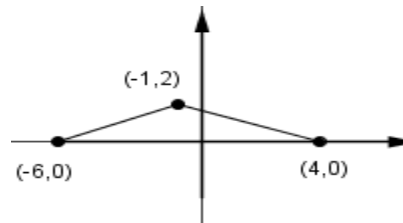
د) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

ه)

و) $f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$, $g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$

ز) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 - x} \sqrt{1 + x}$

۱۰- نمودار یک تابع به شکل زیر است. ضابطه آن را بیابید.



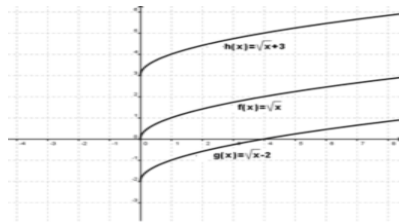
رسم نمودار توابع

سال قبل دیدیم که با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توانیم نمودار تابع $f(x) + a$ را با انتقال

نمودار $f(x)$ به اندازه a واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت

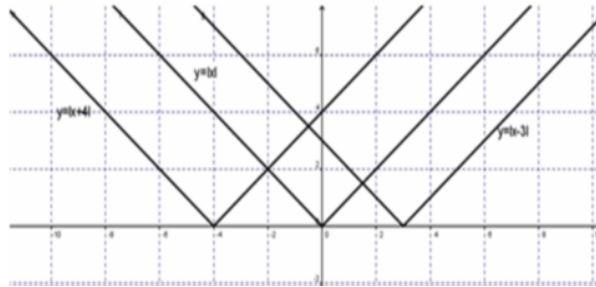
و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \sqrt{x} + 3$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ رسم شده است .



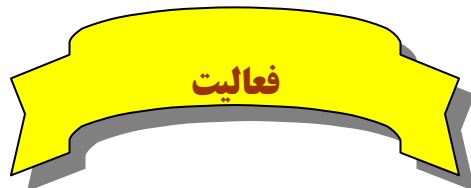
همچنین به کمک مثال هایی مشاهده کردید که برای رسم نمودار تابع $y = f(x+a)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را a واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $a < 0$ انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

مثال: نمودار توابع $y = |x|$ و $y = |x+4|$ و $y = |x-3|$ در شکل زیر رسم شده اند.



در اینجا می خواهیم با رسم نمودار توابع دیگری که از یک تابع داده شده مانند $f(x)$ ساخته شده اند آشنا شویم.

رسم نمودار $af(x)$



۱. تابع $f(x) = \sin x$ داده شده است. تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = 3f(x)$ تعریف می کنیم.

نمودارهای این دو تابع در شکل های زیر در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده اند. با تکمیل جدول

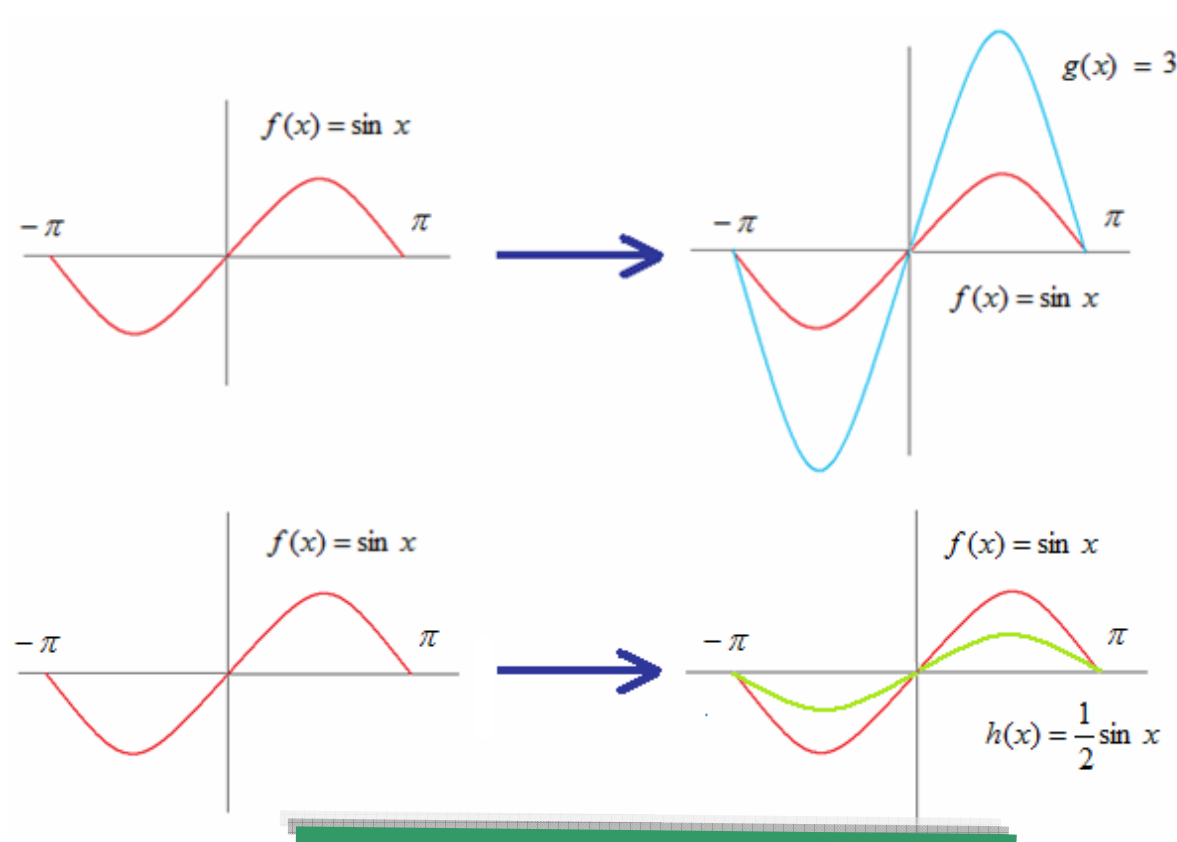
توضیح دهید که نمودارها چگونه رسم شده اند. دامنه ها و برد های دو تابع را با هم مقایسه کنید.

x	$\cdot$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π
$\sin x$	$\cdot$		۱		
$3 \sin x$	$\cdot$		۳		

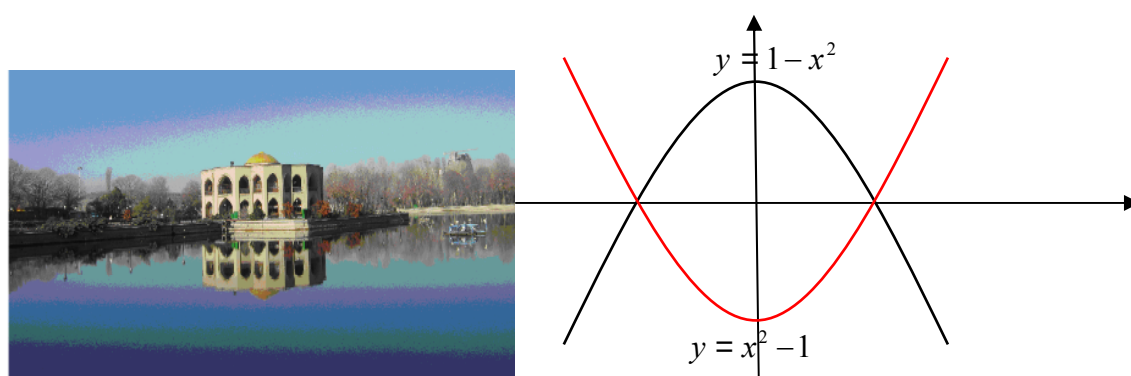
فصل دوم - نسخه دوم

۲. نمودار تابع $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ را نیز در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار $h(x)$ چگونه از

نمودار $f(x)$ به دست می آید؟



نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = -f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه یکدیگرند. برای مثال نمودار دو تابع زیر قرینه یکدیگرند.



عمارت ایل گلی

نمودار تابع $y = af(x)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید:

الف) اگر $a > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0 < a < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a جمع می شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها آینه وار منعکس می شود، سپس با ضریب $|a|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

تمرین در کلاس

۱. دامنه های دو تابع $y = f(x)$ و $y = af(x)$ یکی است. برد های این دو تابع چه تفاوتی با هم دارند؟

۲. نمودار تابع $f(x) = |x+2|$ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع

$$f(x) = -|x+2| \text{ و } f(x) = \frac{1}{4}|x+2| \text{ و } f(x) = -2|x+2| \text{ را رسم کنید.}$$

رسم نمودار $f(ax)$

فعالیت

۱. تابع $f(x) = 1 - |x|$ را با دامنه $[-1, 1]$ در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

آ دامنه ی تابع $f(2x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

دامنه ی تابع $f(3x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

۲. اگر $0 < a$ ، دامنه ی تابع $f(ax)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

فصل دوم - نسخه دوم

۳. در مورد رابطه ی بین دامنه و نمودار تابع $f(ax)$ با دامنه و نمودار تابع $f(x)$ چه نتیجه ای می گیرید؟

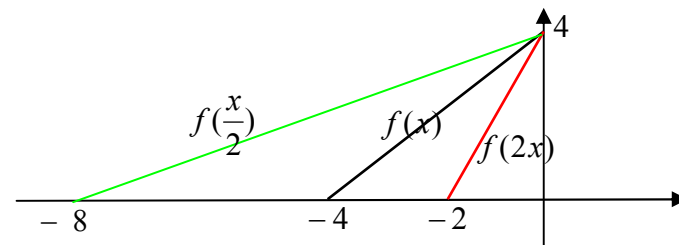
مثال: تابع $f(x) = x + 4$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می گیریم و چگونگی توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را بررسی می کنیم.

روشن است که $f(2x) = 2x + 4$. برای تشخیص دامنه تابع جدید $f(2x) = 2x + 4$ مقدار x باید به گونه ای باشد که $-4 \leq 2x \leq 0$ ، یعنی $-2 \leq x \leq 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[-2, 0]$ می باشد. برای تابع $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$ داریم $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$ و دامنه این تابع آن مقدارهایی برای x است که داشته باشیم $-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0$ ، یعنی $-8 \leq x \leq 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(\frac{x}{2})$ بازه $[-8, 0]$ می باشد. جدول این سه تابع و نمودارهای آنها به شکل زیر است.

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x) = x + 4$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۲	-۱/۵	-۱	-۰/۵	۰
$f(2x) = 2x + 4$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$	۰	۱	۲	۳	۴

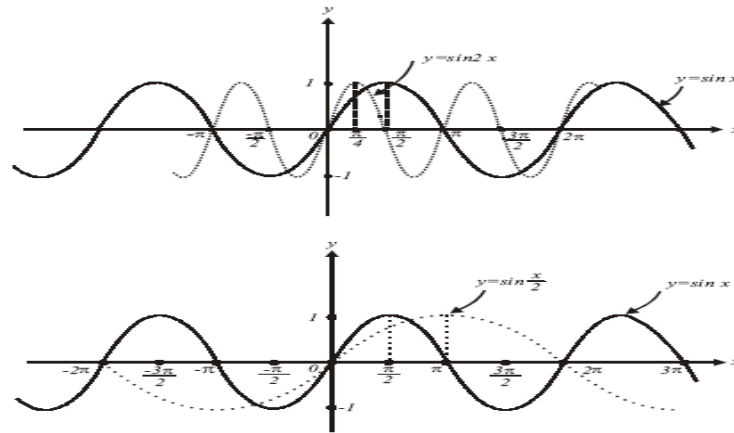


همان طور که در شکل دیده می شود که نمودار $f(2x)$ با انقباض نمودار $f(x)$ در امتداد

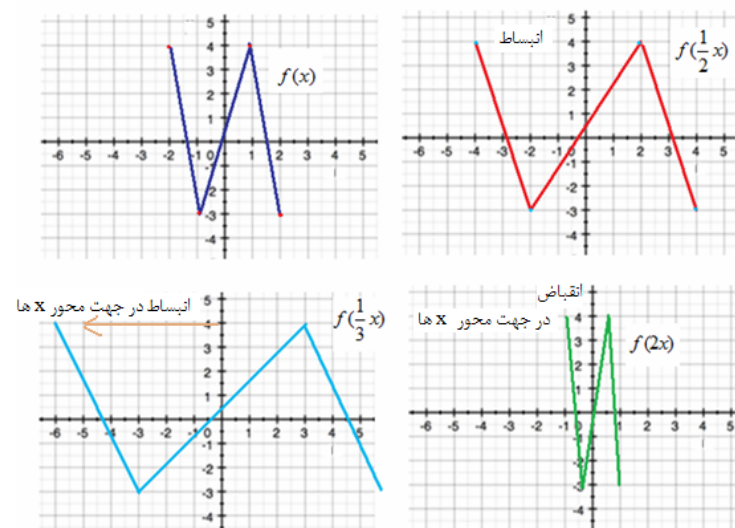
محور x ها (با ضریب $1/2$) و نمودار $f(\frac{x}{2})$ با انبساط نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها (با ضریب 2) به دست آمده است .

اگر $0 < a$ ، نمودار $y = f(ax)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد. در حالتی که $1 < a$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ ، و در حالتی که $a < 1$ نمودار $y = f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.

مثال: در شکل های زیر نمودار های توابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin \frac{x}{2}$ به کمک نمودار $y = \sin x$ رسم شده اند. همان طور که دیده می شود نمودار $y = \sin 2x$ با فشردن (انقباض) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار $y = \sin \frac{x}{2}$ با کشیده شدن (انبساط) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.



مثال: نمودار تابع $f(x)$ و توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{2}x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ در زیر رسم شده اند.



همان طور که در نمودار ها دیده می شود که برد توابع $f(2x)$ $f(\frac{1}{2}x)$ $f(\frac{1}{3}x)$ همان برد تابع $f(x)$ است، اما دامنه ها کشیده تر (منبسط) یا جمع تر (متقبض) شده است.



۱. با در نظرگیری $f(x) = x + 1$ ، ضابطه تابع $f(-x)$ را به دست آورید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

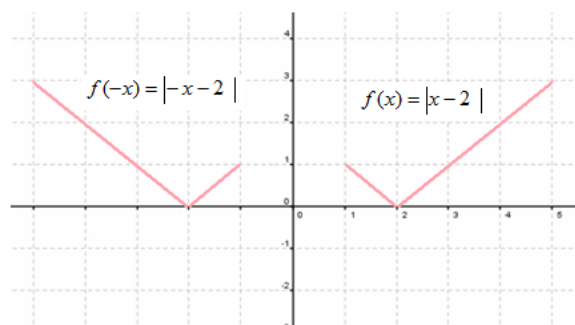
۲. نمودار این دو تابع چه وضعیتی با هم دارند.

۳. برای تابع $g(x) = x^2 - x$ نیز تابع $g(-x)$ را بسازید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت این دو نمودار را نسبت به هم بسنجید.



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ در بازه $[1, 5]$ در سمت راست و نمودار $f(-x) = |-x - 2|$ در سمت چپ شکل زیر رسم شده است.



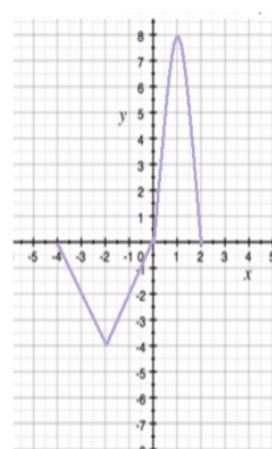
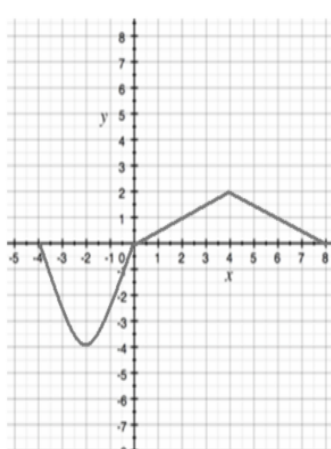
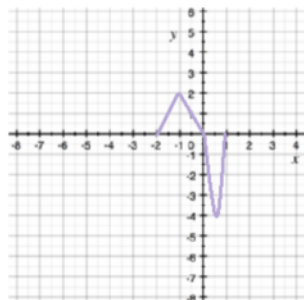
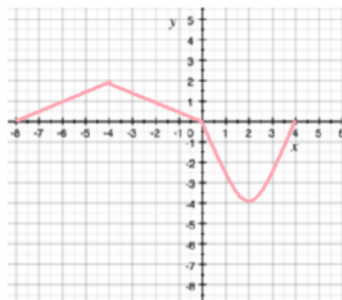
همان طور که دیده می شود نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور y ها قرینه یکدیگرند.



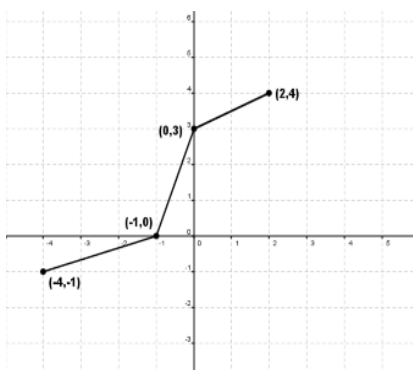
۱. نمودار تابع $g(x)$ به شکل زیر داده شده است.



به کمک این نمودار ، نمودار توابع $2g(x)$ ، $g(-\frac{1}{2}x)$ ، $g(\frac{1}{2}x)$ ، $g(2x)$ ، $-2g(x)$ رسم شده اند . تعیین کنید که هر یک از نمودارهای زیر نمودار کدامیک از این توابع هستند؟

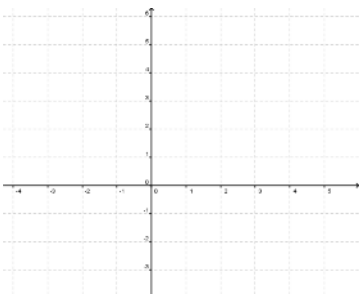


۲. نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر داده شده است.

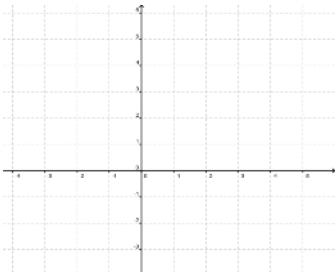


فصل دوم – نسخه دوم

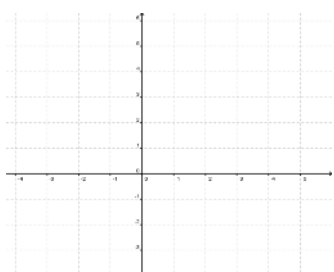
نمودار توابع داده شده را رسم کنید .



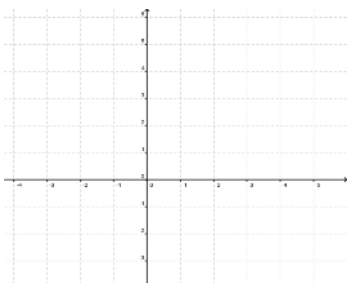
$y = f(x) - 2$



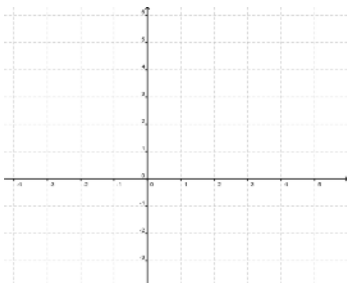
$y = f(x - 2)$



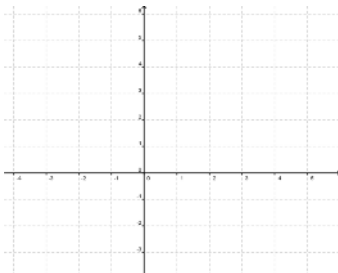
$y = -f(x - 1)$



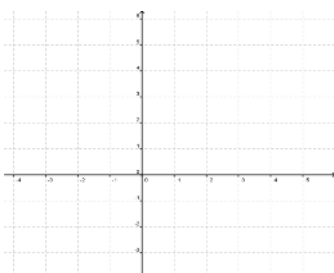
$y = f(\frac{1}{2}x)$



$y = f(2x)$



$y = f(-\frac{1}{2}x)$



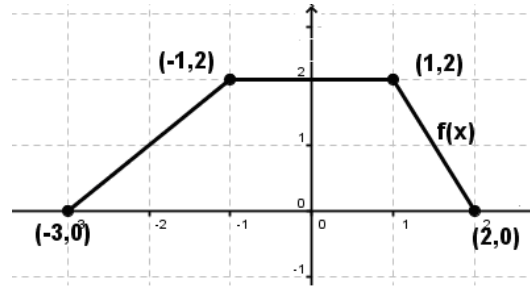
$y = f(-x)$

$y = -2f(x + 2)$



۱- ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y = -3|x-1| + 2$ را رسم کنید .

۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر داده شده است . به کمک این نمودار ، نمودار توابع داده شده را رسم کنید .



ب ($g(x) = f(-x)$)

الف ($g(x) = \frac{1}{2}f(x)$)

د ($g(x) = f(-\frac{1}{2}x)$)

ج ($g(x) = f(3x)$)

و ($g(x) = f(x+2)$)

هـ ($g(x) = -2f(x)$)

ح ($g(x) = -2f(x+2) + 3$)

ز ($g(x) = 3f(x-1)$)

۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(-2x)$ ، $y = -f(2x)$ را رسم کنید.

۴- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف (اگر $f(x) = |x|$ ، $g(x) = |x+3| - 3$ ، نمودار g را می توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

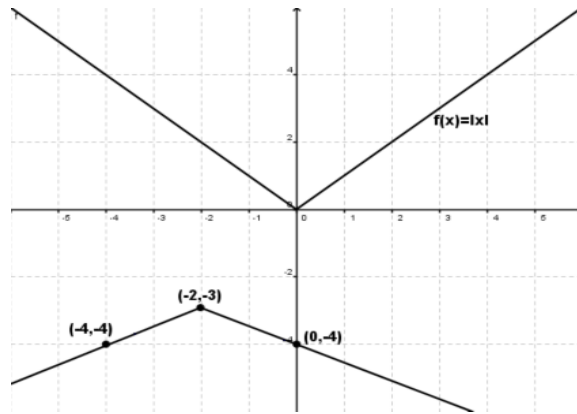
ب ($f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند .

ج (اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 3(x^2 - 2)$ ، نمودار g را می توان از نمودار f با یک انقباض با ضریب ۳ و سپس با یک تغییر مکان به میزان ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها به دست آورد .

د (اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = -(x-2)^2 + 4$ آن گاه نمودار g را می توان از نمودار f با یک تغییر مکان به میزان دو واحد به راست ، سپس انعکاس نسبت به محور x ها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

فصل دوم - نسخه دوم

۵- در شکل زیر نمودار توابع g و f در یک دستگاه مختصات رسم شده اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله ای برای g بیابید.



۶- نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها، انعکاس داده ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷- نقطه $(-8, 6)$ را روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در توابع زیر این نقطه به چه نقطه ای تبدیل می شود؟

الف ($g(x) = \frac{1}{2}f(x)$) ب ($g(x) = f(-x)$)

ج ($g(x) = f(x) - 3$) د ($g(x) = 3f(x)$)

۸- در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می آید.

الف ($f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 3$)

ب ($f(x) = x^2$, $g(x) = -2(x+4)^2 - 3$)

ج ($f(x) = |x|$, $g(x) = -2\left|x - \frac{1}{3}\right| + 1$)

۹- اگر $f(x) = \cos x$ مطلوبست نمودار $f(-x), -f(x), f(\frac{1}{2}x), f(2x)$.

۱۰- نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سوالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱- اگر $a < 0$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می شود؟

اعمال جبری روی توابع

فعالیت

یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{1}{2}$ لیتر آب خارج می شود و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می شود. در لحظه $t = 0$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می کنیم.

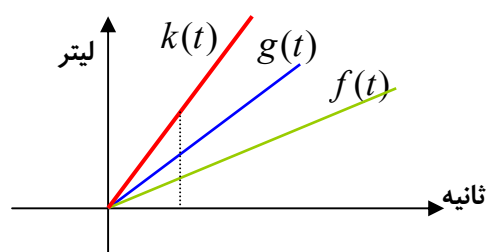
۱. جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آبهای خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{7}{2}$	4	5
حجم آب خارج شده از شیر اول						
حجم آب خارج شده از شیر دوم						
حجم آب موجود در حوض						

۲. توابعی را بنویسید که حجم آب خارج شده از شیر اول و شیر دوم و حجم آب حوض را در هر لحظه دلخواه t نشان دهد. این توابع را به ترتیب f و g و k بنامید.

۳. در هر لحظه t بین $f(t)$ و $g(t)$ و $k(t)$ چه رابطه ای وجود دارد؟

۴. نمودار سه تابع f و g و k در زیر رسم شده اند. رابطه بین این توابع را از روی نمودار توضیح دهید.



در سالهای قبل با جمع اعداد و جمع ماتریس ها و جمع چندجمله ای ها آشنا شدید. توابع را نیز می توان با هم جمع کرد و تابع جدیدی به دست آورد. در فعالیت قبل با جمع دو تابع روبرو شدیم و جمع دو تابع را به دست آوردیم.

فصل دوم - نسخه دوم

اگر f و g دو تابع باشند که روی دامنه یکسانی مانند A تعریف شده اند، به ازای هر مقدار x در A مقادیرهای $f(x)$ و $g(x)$ به دست می آیند و می توانیم مقدار $f(x) + g(x)$ را بسازیم. تابعی که به هر مقدار x در A مقدار $f(x) + g(x)$ را نظیر می سازد جمع f و g نامیده می شود. جمع f و g را با $f + g$ نشان می دهند.

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده اند، $f + g$ تابعی است که روی A تعریف شده است و برای هر مقدار x در A داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

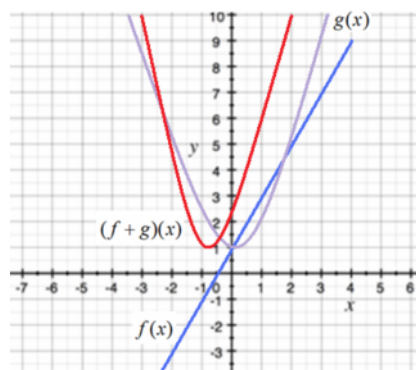
مثال: فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$. این دو تابع روی $\mathbb{R}$ تعریف شده اند، بنابراین $f + g$ نیز روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و برای مثال مقدار این تابع در $x = 3$ به شکل زیر محاسبه می شود.

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 7 + 10 = 17$$

اما برای یک مقدار دلخواه x مقدار تابع $f + g$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

روشن است که چندجمله ای بالا به ازای $x = 3$ برابر ۱۷ خواهد شد. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آنها در شکل رسم شده اند.



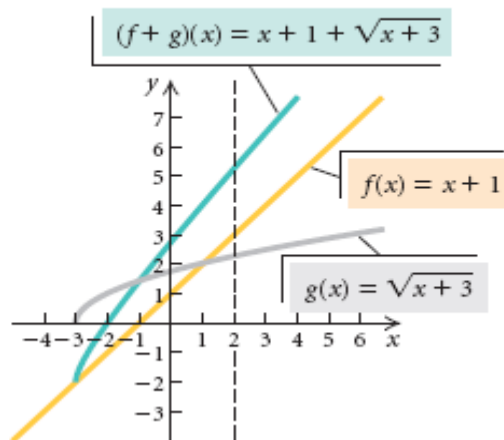
بحث در کلاس

چرا مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است؟

فصل دوم - نسخه دوم

آیا می توانیم دو تابع $f(x) = x+1$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ را با هم جمع کنیم؟ این دو تابع دامنه یکسانی ندارند ولی به ازای x هایی که در دامنه هر دو تابع باشند مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ قابل محاسبه اند و می توانیم مجموع $f(x) + g(x)$ را حساب کنیم. بنابراین می توانیم تابع $f + g$ را روی $D_f \cap D_g$ مانند قبل تعریف کنیم.

در این مثال دامنه $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-3, \infty)$ بنابراین $f + g$ روی $[-3, \infty)$ تعریف شده است و برای هر x در این مجموعه داریم $(f + g)(x) = x+1 + \sqrt{x+3}$. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آنها در شکل رسم شده اند.



برای دو تابع f و g که روی دامنه های دلخواهی تعریف شده اند، $f + g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$

تابع $f + g$ فقط برای $x = 1, x = -2$ تعریف می شود و داریم:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6$$

$$(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 5 + 3 = 8$$

بنابراین $f + g = \{(1, 6), (-2, 8)\}$.

فصل دوم - نسخه دوم

اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع به شکل مشابه تعریف می شوند.

برای دو تابع f و g که روی دامنه های دلخواهی تعریف شده اند،
تفاضل g از f تابعی است که با $f - g$ نشان می دهیم که روی
 $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه های دلخواهی تعریف شده اند،
حاصلضرب f و g تابعی است که با $f.g$ نشان می دهیم که روی
 $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه
داریم:

برای دو تابع f و g که روی دامنه های دلخواهی تعریف شده اند،
تقسیم f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می دهیم که روی
 $D_f \cap D_g$ تعریف شده است که $g(x) \neq 0$ ، و برای هر مقدار x در
این مجموعه داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: برای دو تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ توابع $f + g$ و $f - g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$

را به همراه دامنه آنها مشخص می کنیم.

دامنه های f و g تمام $\mathbb{R}$ هستند، بنابراین دامنه توابع $f + g$ و $f - g$ و $f.g$ نیز برابر $\mathbb{R}$ هستند.

حل: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 1 + 3x + 2 = x^2 + 5x + 1$

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 1 - 3x - 2 = x^2 - x - 3 \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x - 1)(3x + 2) \\ &= 3x^3 + 2x^2 + 6x^2 + 4x - 3x - 2 = 3x^3 + 8x^2 + x - 2\end{aligned}$$

تابع g فقط در $x = -\frac{2}{3}$ صفر است، بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 2} \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

مثال: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به

همراه دامنه آنها مشخص می کنیم.

ابتدا دامنه های f و g را مشخص می کنیم.

حل: $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ $D_f = \{x | x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty)$

دامنه های توابع $f+g$ و $f-g$ و fg مجموعه $D_f \cap D_g$ است و داریم:

$$D_f \cap D_g = [-2, \infty) \cap \mathbb{R} - \{3\} = [-2, 3) \cup (3, \infty)$$

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x-3}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$$

از آنجا که g در هیچ نقطه ای از دامنه خود صفر نمی شود، دامنه $\frac{f}{g}$ همان $D_f \cap D_g$ است.

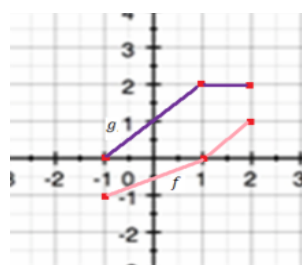
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\frac{1}{x-3}} = (x-3)\sqrt{x+2}$$

تمرین در کلاس

۱. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x + 1$ ، دامنه های توابع $f+g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این

توابع را مشخص کنید.

۲. نمودار توابع f, g در شکل زیر رسم شده است.



فصل دوم - نسخه دوم

الف) $(f+g)(1), (f+g)(2)$ را حساب کنید .

ب) با استفاده از نمودار های f, g ، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید .

ج) معادله ای برای f, g و $f+g$ بیابید .

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادله ی آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید .

ترکیب توابع

فعالیت

سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می شود و باعث ایجاد موج هایی به شکل دایره های هم مرکز می شود . شعاع بزرگترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت $r(t) = 2t$ باشد. t بر حسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می دهد و r بر حسب سانتی متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت $A(r) = \pi r^2$ می باشد.



سی و سه پل - اصفهان

۱. جدول زیر را کامل کنید.

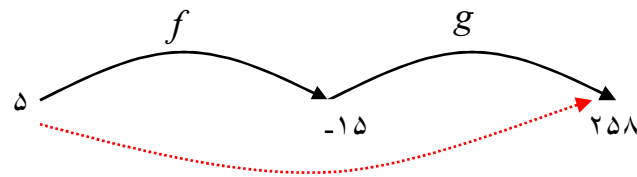
t (زمان)	۱	۲	۳	۴	۵	t
r (شعاع دایره در لحظه t)			۶			$r(t) = 2t$
A (مساحت دایره در لحظه t)			36π			$A(r(t)) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$

۲. تابعی که مساحت دایره را در هر لحظه t به دست می دهد، چگونه از طریق دو تابع $r(t)$ و

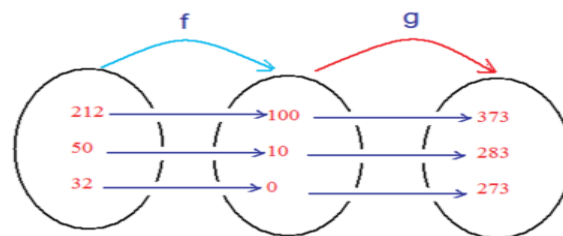
$A(r)$ ساخته شده است؟

فصل دوم - نسخه دوم

در فعالیت بالا با دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ روبرو شدیم ه مقدارهای تابع $r(t)$ به صورت ورودی تابع $A(r)$ قرار گرفتند و تابع جدید $A(r(t))$ را به وجود آوردند. این تابع جدید را ترکیب دو تابع می نامند. مثال: تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه ی فارنهایت را به درجه ی سانتیگراد تبدیل می کند. مثلاً $f(32) = 0$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتیگراد است. تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتیگراد را به درجه کلون تبدیل می کند. برای مثال $g(0) = 273$ یعنی صفر درجه سانتیگراد معادل ۲۷۳ درجه کلون است. اگر بخواهیم بدانیم ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است، ابتدا به کمک تابع f داریم $f(5) = -15$ یعنی ۵ درجه فارنهایت معادل -۱۵ درجه سانتی گراد است و سپس به کمک تابع g داریم $g(-15) = 258$ ، بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلون است. به عبارت دیگر $g(f(5)) = (g(-15)) = 258$. نمودار زیر این فرآیند را نشان می دهد.



در نمودار زیر تبدیل برخی دیگر از درجات فارنهایت به درجات کلون نمایش داده شده است.



اگر $k(x)$ تابعی باشد که مستقیماً درجه های فارنهایت را به درجه های کلون تبدیل می کند داریم:

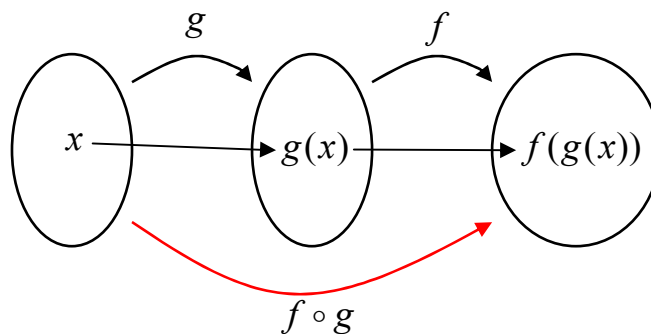
$$k(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) = \frac{5}{9}(x - 32) + 273 = \frac{1}{9}(5x + 2297)$$

برای مثال از طریق این تابع دیده می شود $k(212) = 373$ ، $k(32) = 273$.

در این مثال تابع k از ترکیب دو تابع f و g ساخته شده است. به خاطر شیوه محاسبه تابع k آن را با $g \circ f$ (بخوانید جی او اف) نشان می دهند. بنابراین $g \circ f$ تابعی است که در هر مقدار x به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ محاسبه می شود.

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیرمجموعه ای از دامنه f باشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن همان دامنه g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



مثال: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + x^2$ ، برد g زیرمجموعه ای از دامنه f است و می توانیم تابع مرکب $f \circ g$ را بسازیم. دامنه $f \circ g$ برابر دامنه g است که تمام $\mathbb{R}$ است و ضابطه آن به شکل زیر است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = \sqrt{1 + x^2}$$

تابع مرکب $g \circ f$ نیز قابل ساخت است زیرا برد f زیرمجموعه ای از دامنه g می باشد. دامنه $g \circ f$ همان دامنه f است که بازه $[0, \infty)$ است. ضابطه $g \circ f$ به شکل زیر است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x$$

توجه داشته باشید که اگرچه ضابطه $g \circ f$ به گونه ای است که برای مقادیر منفی x هم معنا دارد ولی به عنوان تابعی که از ترکیب دو تابع ساخته شد است دامنه آن فقط بازه $[0, \infty)$ است. این مثال همچنین نشان می دهد که دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در حالت کلی مساوی نیستند.

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیرمجموعه ای از دامنه f نباشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن تمام دامنه g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$ ، بنابراین در حالت کلی دامنه $f \circ g$ به شکل زیر است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال: برای دو تابع $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را می سازیم و با نمودار ون نمایش می دهیم.

فصل دوم - نسخه دوم

برای محاسبه $f \circ g$ ابتدا مشاهده می کنیم برد g زیرمجموعه ای از دامنه f است، پس $D_{f \circ g} = D_g$. مقدار تابع $f \circ g$ را در نقاط دامنه g حساب می کنیم.

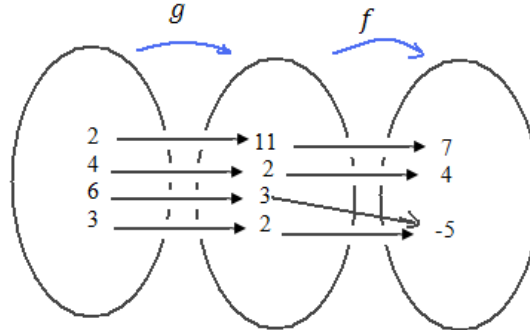
$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(11) = 7$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-2) = 4$$

$$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = -5$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = -5$$

بنابراین $f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$.



برای محاسبه $g \circ f$ ابتدا مشاهده می کنیم که برد f زیرمجموعه ای از دامنه g نیست، بنابراین دامنه $g \circ f$ تمام دامنه f نخواهد بود. یکی یکی اعضای دامنه f را بررسی می کنیم تا معلوم شود که آیا شرط قرار گرفتن در دامنه $g \circ f$ را دارند یا نه.

$$f(11) = 7 \notin D_g$$

$$f(-2) = 4 \in D_g$$

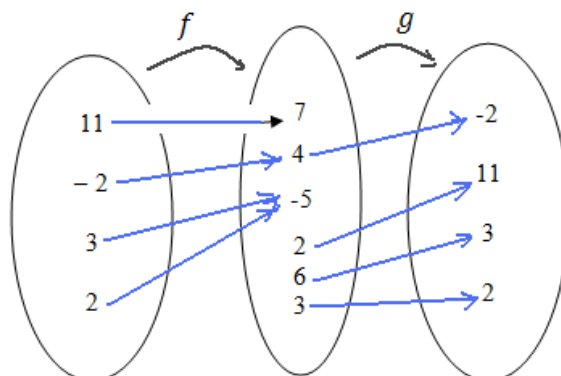
$$f(3) = -5 \notin D_g$$

$$f(2) = -5 \notin D_g$$

بنابراین فقط -2 در دامنه $g \circ f$ قرار دارد و از آنجا که

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = -2$$

داریم: $g \circ f = \{(-2, -2)\}$



فصل دوم - نسخه دوم

مثال: برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را محاسبه می کنیم.

برای محاسبه دامنه $f \circ g$ ابتدا دامنه g را بررسی می کنیم که $\mathbb{R} - \{0\}$. دامنه f نیز $\mathbb{R} - \{3\}$ است. مقدار $g(x)$ نباید ۳ شود. معادله $g(x) = 3$ دارای جواب $x = \frac{4}{3}$ است، یعنی $\frac{4}{3}$ نقطه ای است که $g(\frac{4}{3})$ در دامنه f قرار ندارد. در نتیجه

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\}$$

ضابطه $f \circ g$ را حساب می کنیم.

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$$

عبارت بالا اگرچه به ازای $x=0$ با معنا است، ولی صفر در دامنه تابع ترکیب یافته نیست زیرا به هنگام محاسبه مشاهده می کنید که عبارت $\frac{4}{x}$ در محاسبه وجود دارد که به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

تمرین در کلاس

۱- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 5$ ، $g \circ f$ و $f \circ g$ را حساب کنید و نشان دهید که $g \circ f \neq f \circ g$

۲- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{7-x^2}$ ، $g \circ f$ و دامنه ی آن را حساب کنید.

مسائل

۱- اگر $f(x) = \frac{5x}{3x-7}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{5x-15}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.

۲- در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آنها را به دست آورید.

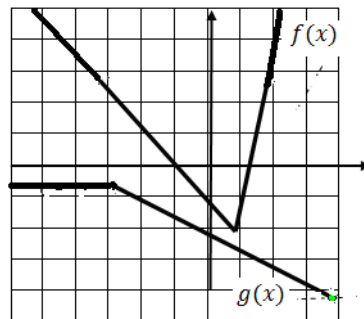
$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad ff, \quad \frac{f}{g}, \quad \frac{g}{f}$$

الف) $f(x) = 4x$ ، $g(x) = 2-x$

فصل دوم - نسخه دوم

$$\begin{aligned} \text{ب) } g(x) &= \frac{1}{6-x}, \quad f(x) = \frac{4}{x-2} \\ \text{ج) } g(x) &= \sqrt{x+2}, \quad f(x) = \sqrt{x-2} \\ \text{د) } g(x) &= \frac{2}{x}, \quad f(x) = \sqrt{x+3} \end{aligned}$$

۳- با استفاده از نمودارهای f, g که در یک دستگاه مختصات رسم شده اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.



$$\begin{aligned} \text{ا) } (f+g)(-4) & \quad \text{د) } (f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \text{ب) } (f-g)(3) & \quad \text{ز) } (g \circ f)(-5) \\ \text{ج) } \left(\frac{f}{g}\right)(0) & \quad \text{ح) } (f \circ f)(7) \\ \text{د) } (f+g)(2) & \quad \text{ط) } (f \circ g)(4) \\ \text{ه) } (fg)\left(\frac{1}{3}\right) & \quad \text{ی) } \left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

۴- فرض کنیم $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : g$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد. اگر

$$f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\} \quad \text{و} \quad A = \{1,2,3,4\} \quad \text{و} \quad f: A \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{به صورت}$$

تعریف شود، توابع $g \circ f$ ، $2f + g$ را محاسبه کنید.

۵- دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ مفروضند. دامنه تابع $f \circ g$ را بدون محاسبه $(f \circ g)(x)$ بدست آورید.

۶- یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه ای استفاده می شود.

آ) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

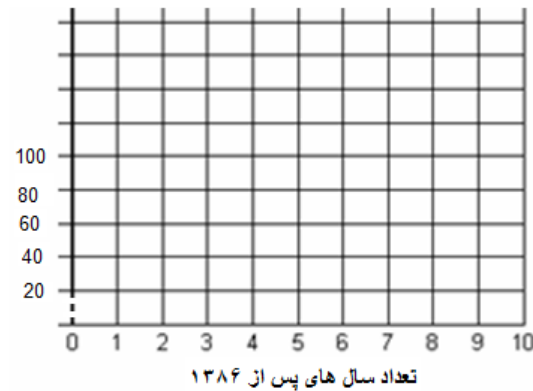
ج) $(A \circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

فصل دوم - نسخه دوم

۷- فرض کنیم: $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{3}{2}, 0), (3, -5)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع زیر را حساب کنید.

$$f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}$$

۸- یک رمان پر فروش در باره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری در باره دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد.



اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را بر حسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۰ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

۹- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

۱۰- توابع f, g با ضابطه های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $f \circ (f + g)$ را به دست آورید.

۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & 1 \leq x \end{cases}$ مقدار $f(f(\frac{3}{4}))$ را به دست آورید.

۱۲- کدامیک از گزاره های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

آ) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آنگاه

فصل دوم - نسخه دوم

$$(fog)(x) = -x^2, \quad (fog)(5) = -25$$

ب) اگر $f(7) = 5, g(4) = 7$ آنگاه $(fog)(4) = 35$

ج) اگر $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x - 1$ آنگاه $(fog)(5) = g(2)$

د) برای هر دو تابع f, g داریم: $f \circ g = g \circ f$

۱۳- اگر $g(x) = 2x + 1, h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمی که $f \circ g = h$.

۱۴- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، توابع $f \circ g, g \circ f$ و دامنه آن ها را به دست آورید.

۱۵- جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

مقدارهای زیر را حساب کنید.

۱) $f(g(1))$

۲) $g(f(1))$

۳) $f(f(1))$

۴) $g(g(1))$

۵) $(g \circ f)(3)$

۶) $(f \circ g)(6)$

۱۶- اگر $f = \{(4,5), (6,5), (8,12), (10,12)\}$ و $g = \{(4,6), (2,4), (6,8), (8,10)\}$

توابع $f \circ g, g \circ f$ را حساب کنید.

توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی

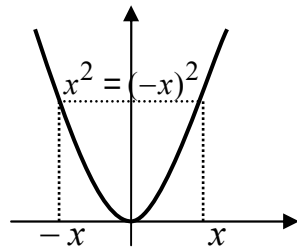


باغ دولت آباد یزد

فصل دوم - نسخه دوم

وجود تقارن در خلقت و آفرینش مناظر چشم نوازی را پدید آورده است. انسان در ساخته های خود از این نکته فراوان بهره برده است. نمودار برخی از توابع متقارن است و همین موضوع کار با آنها را ساده تر می کند. تابع آشنای $f(x) = x^2$ نمونه ای از این گونه توابع است. این تابع نسبت به محور y ها متقارن است. علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه آن، $-x$ نیز در دامنه آن است و علاوه

$$\text{بر آن } f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$



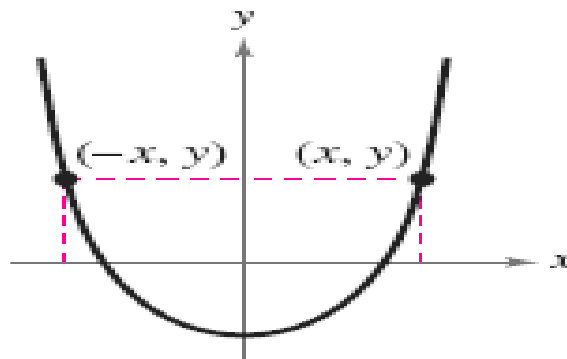
تمام توابعی که این دو خاصیت را دارا هستند، به عنوان توابع زوج می شناسیم. به بیان دقیق تر:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

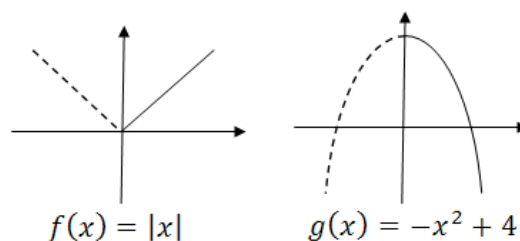
(آ) دامنه آن متقارن باشد، یعنی برای هر $x \in D_f$ ، $-x \in D_f$

(ب) برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = f(x)$

در رسم نمودار توابع زوج از این نکته که نمودار آن ها نسبت به محور y ها متقارن است استفاده می شود.



مثال: توابع $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -x^2 + 4$ زوج هستند:



شرط متقارن بودن دامنه برای هر دو تابع برقرار است. همچنین داریم:

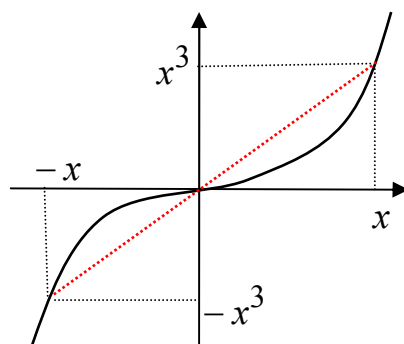
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$$

تقارن نسبت به محور y ها نیز در نمودارهای این دو تابع دیده می شود.

تقارن نمودار توابع نسبت به مبدا مختصات نیز در بسیاری از توابع دیده می شود. برای مثال نمودار تابع

$f(x) = x^3$ نسبت به مبدا متقارن است.



علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه f ، $-x$ نیز در دامنه f است و

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

این خاصیت باعث می شود هر نقطه روی نمودار این تابع که به صورت (x, x^3) است متقارن آن نسبت

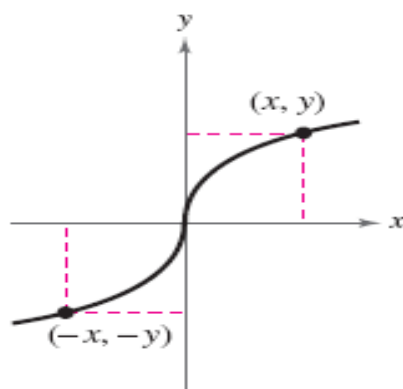
به مبدا که نقطه $(-x, -x^3)$ است نیز روی نمودار این تابع باشد. توابعی که چنین خاصیتی دارند، تابع

فرد نامیده می شوند.

تابع f را فرد نامیم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x در دامنه آن،

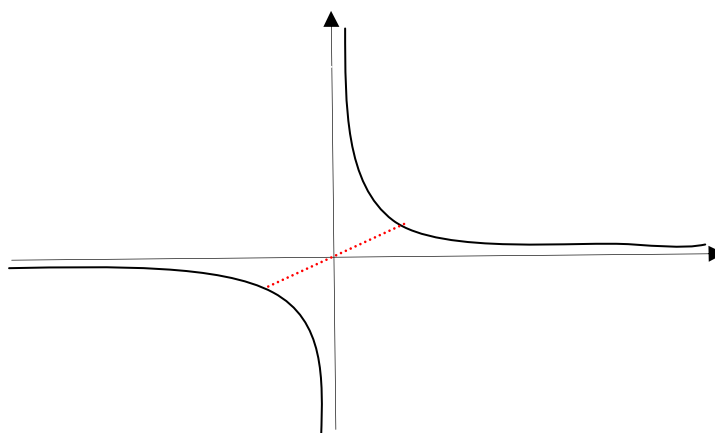
$$f(-x) = -f(x)$$

در رسم نمودار توابع فرد از این نکته که نمودار آنها نسبت به مبدا مختصات متقارن است استفاده می شود.



مثال: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابعی فرد است. زیرا دامنه آن متقارن است و داریم:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$



تمرین در کلاس

۱. توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y = \frac{1}{x-x^3}$	ب) $y = 1-x^4$	ج) $y = \sqrt{x}$
د) $y = \sqrt[3]{x}$	ه) $y = x- x $	و) $y = x\sqrt{ x }$

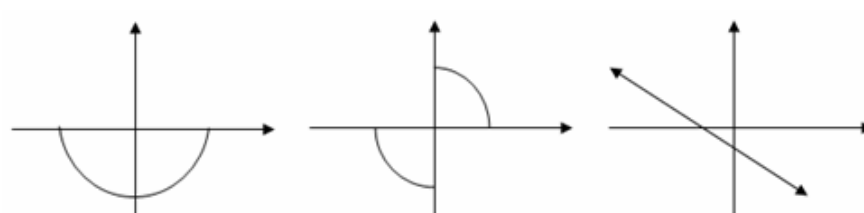
(۱) دامنه کدامیک از توابع داده شده متقارن است؟

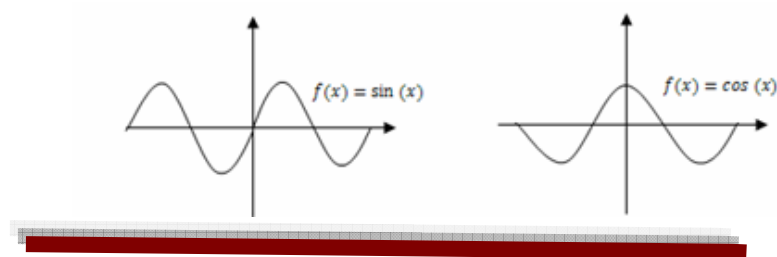
(۲) کدامیک از این توابع زوج هستند؟

(۳) کدامیک از این توابع فرد هستند؟

(۴) کدامیک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

۲. تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آنها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آنها را معلوم کنید.

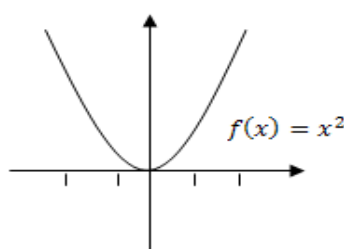




بحث در کلاس

آیا نمودار یک تابع می تواند نسبت به محور x ها متقارن باشد؟

یکی از سوالاتی که در مورد توابع مطرح است این است که با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع چه تغییری می کند؟ گاهی اوقات با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع افزایش می یابد. همچنین برخی مواقع با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع کاهش می یابد. این ویژگیها را **صعودی** بودن یا **نزولی** بودن تابع می نامند. برای مثال تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-2, 2]$ در نظر بگیرید.

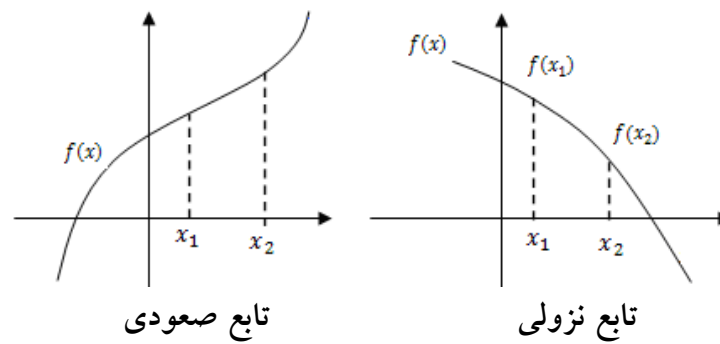


در بازه $[0, 2]$ همان گونه که از سمت چپ به سمت راست حرکت می کنیم، مقادیر متناظر تابع کمتر می شوند، یعنی با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کمتر می شوند. در این حالت گوییم تابع در بازه $[0, 2]$ نزولی است. اما در بازه $[2, 0]$ با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایش می یابند. در این بازه تابع $f(x) = x^2$ را صعودی نامیم.

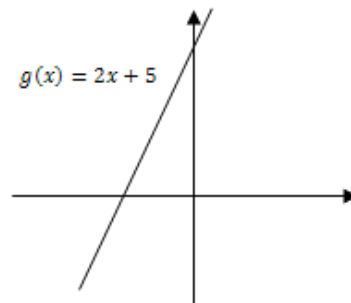
تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

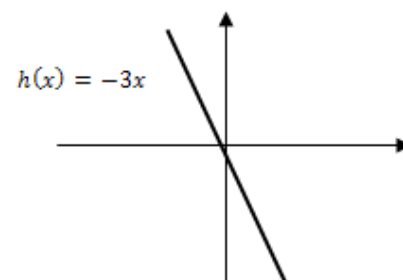
تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) < f(x_2)$.
 تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$.



مثال: تابع $g(x) = 2x + 5$ صعودی اکید است. همانگونه که از نمودار $g(x)$ پیداست این تابع یک به یک است. این موضوع برای تمام توابع صعودی اکید برقرار است.

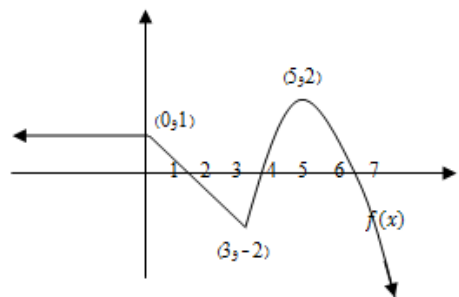


مثال: تابع $h(x) = -3x$ نزولی اکید است. این تابع (با توجه به نمودار آن) یک به یک است. این ویژگی برای هر تابع نزولی اکید برقرار است.



تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو x_1, x_2 از دامنه f ، داشته باشیم: $f(x_1) = f(x_2)$.

ممکن است یک تابع در دامنه اش نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه هایی از دامنه اش صعودی و در بازه هایی نزولی باشد. برای مثال تابع $f(x)$ را با نمودار زیر در نظر بگیرید.



همان گونه که در شکل دیده می‌شود، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, 0]$ ثابت و در بازه $[0,3]$ نزولی (اکید) و در بازه $[3,5]$ صعودی (اکید) و در بازه $(5, \infty)$ نزولی اکید است.

تمرین در کلاس

توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آنها تعیین کنید که در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی و در چه بازه هایی ثابت هستند.

الف) $f(x) = |x + 2| - 3$

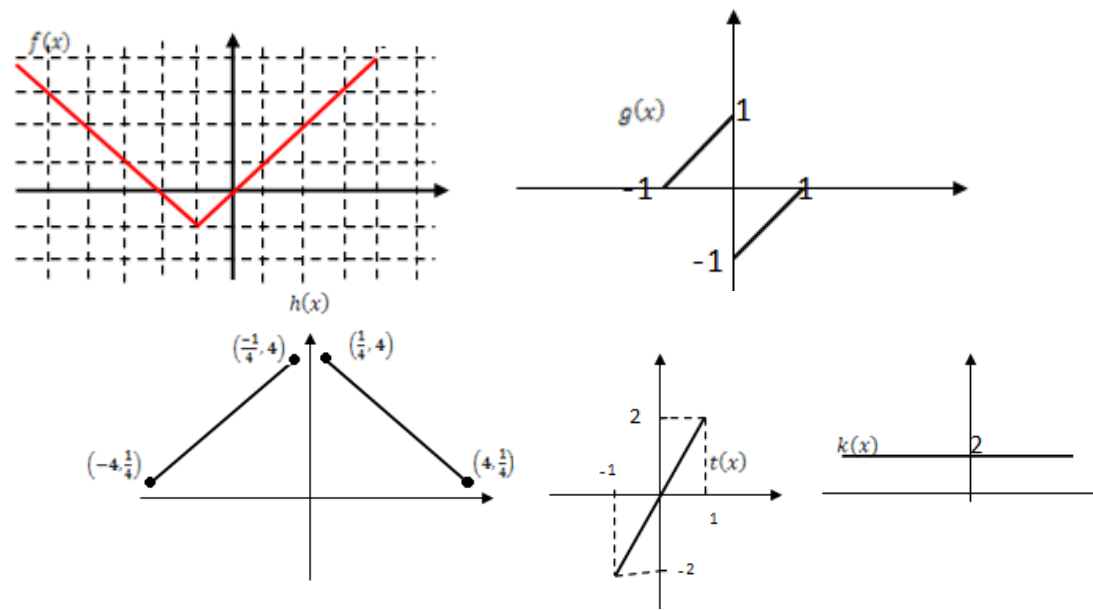
ب) $g(x) = x^2 - 6x + 10$

ج) $h(x) = \sqrt{1-x}$

د)
$$t(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

مسائل

۱- نمودار توابع $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ ، $k(x)$ و $t(x)$ در زیر داده شده اند



به دو روش نموداری و جبری (ضابطه توابع) تعیین کنید که کدام یک از آن ها زوج ، کدامیک فرد و کدامیک نه زوج و نه فرد هستند.

۲- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید:

آ) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

د) $f(x) = |x|$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

ه) $f(x) = 2x + \sin(x)$

ج) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

و) $f(x) = x^2 + 2x^8$

۳- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

آ) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ب) حاصلضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ج) حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

د) حاصلضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج ، تابعی زوج است.

۴- فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید:

الف) $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

ج) f را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

فصل دوم - نسخه دوم

د) تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵- آیا تابعی یافت می شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

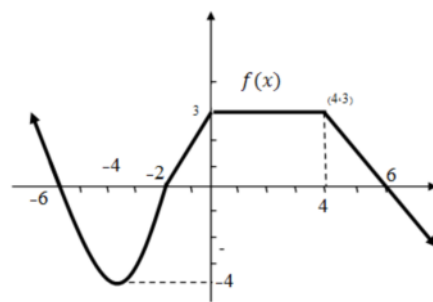
۶- در هر یک از حالت های زیر نقطه ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که: (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

د) $(5, 3)$ ج) $(-\frac{2}{7}, -7)$ ب) (a, b) الف) $(-7, 2)$

۷- تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 18 & x < -5 \\ 1 & -5 \leq x < 1 \\ x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۸- با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است، بازه هایی را که تابع در آنها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید. نمودار برای مقادیر کمتر یا مساوی ۲- بخشی از یک سهمی است. معادله ای برای این تابع بنویسید.

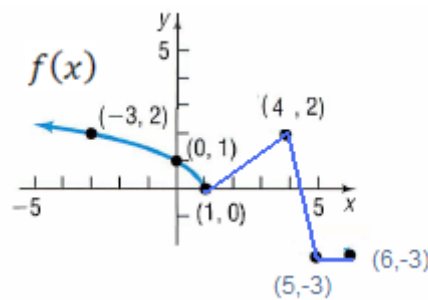


۹- تعیین کنید توابع زیر در چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

ا) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ب) $f(x) = \frac{1}{x}$ ج) $f(x) = -|x-2| + 5$

۱۰- تابع $f(x) = -2x^2 + 16x - 35$ را رسم کنید و بازه هایی که تابع روی آنها صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.

۱۱- نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.



فصل دوم - نسخه دوم

با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) دامنه و برد f را پیدا کنید.

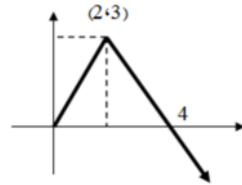
ب) بازه هایی که در آنها $f(x) < 0$ یا $f(x) > 0$ را بیابید.

ج) بازه هایی که f در آنها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

ه) $f(\frac{7}{2})$, $f(5.3)$ و $f(-4)$ را بیابید.

۱۲- نمودار تابع h در شکل زیر داده شده است.



آ) نمودار را به گونه ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۳- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد. آیا می

توان a را به قسمی یافت که تابع زوج شود؟

۱۴- زوج یا فرد بودن توابع f, g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f = \{(-2,5), (-1,4), (0,3), (1,4), (2,5)\}$$

$$g = \{(-2,1), (-1,2), (0,0), (1,-2), (2,-1)\}$$

توابع یک به یک و تابع وارون

فعالیت

۱. محیط هر مربع تابعی از اندازه یک ضلع آن است. محیط را با P و طول ضلع را با l نشان دهید و

P را به صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک به یک است؟

۲. اندازه ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از P بنویسید.

۳. این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بنویسید.

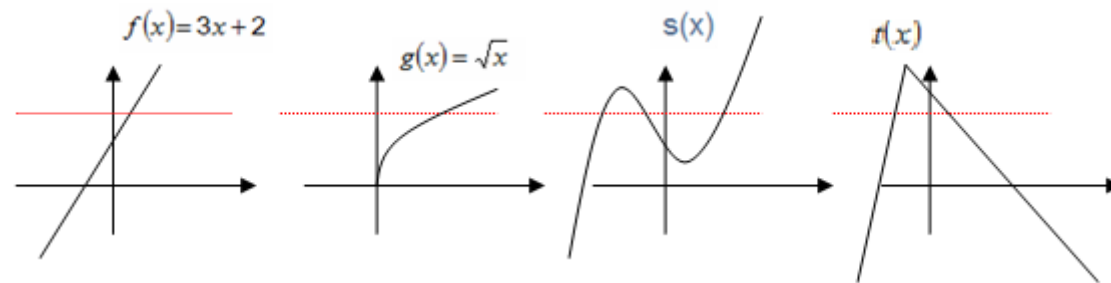
۴. با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آنها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.
(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a,b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b,a)$ است.)

توابع یک به یک

همان طور که در درس ریاضی ۲ دیده اید وارون هر تابع، لزوماً یک تابع نمی باشد. به عبارت دیگر تنها توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند. این از جمله دلایلی است که باعث می شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم.
از قبل می دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_2, x_1 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_2), f(x_1)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می توان نوشت:

$$\text{تابع } f \text{ یک به یک است هر گاه: } x_1, x_2 \in D_f, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل های داده شده توابع f, g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می باشند. توابع s, t یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_2, x_1 یافت نمی شود که برای آن ها: $f(x_1) = f(x_2)$. به بیان دیگر اگر برای هر دو نقطه دلخواه x_2, x_1 ، $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$.

تابع یک به یک را به روش زیر نیز می توان مشخص کرد.

تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_2, x_1 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

فصل دوم - نسخه دوم

مثال: نشان می دهیم تابع $f(x) = 3x + 2$ یک به یک است.

به کمک نمودار تابع دیده می شود که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع

می کند. از طریق جبری نیز با فرض $f(x_1) = f(x_2)$ ثابت می کنیم $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

روش جبری در جاهایی که نمودار تابع شناخته شده نیست یا رسم آن دشوار است مناسب است.

مثال: ثابت می کنیم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow -2x_1 - x_1 = -2x_2 - x_2 \\ &\Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

بنابراین f یک به یک است و در نتیجه وارونپذیر است.

مثال: تابع $g(x) = \sqrt{x}$ یک به یک است. این موضوع به دو روش قابل اثبات است.

الف) استفاده از آزمون خط افقی، یعنی هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

در حقیقت $g(x) = \sqrt{x}$ یک تابع اکیدا صعودی است، در نتیجه اگر $x \neq x$ اطمینان داریم که

$f(x) \neq f(x)$. این خاصیت برای تمام توابع اکیدا صعودی برقرار است. توابع اکیدا صعودی یک

به یک و در نتیجه وارونپذیر هستند. توابع نزولی اکیدا نیز یک به یک و در نتیجه وارونپذیر هستند.

ب) روش محاسبه جبری: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

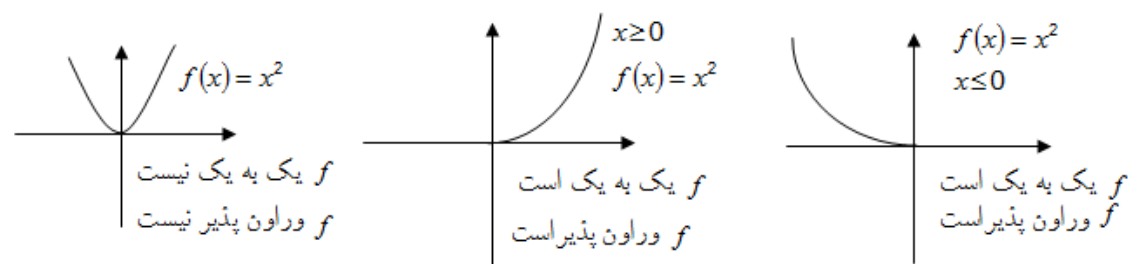


کدامیک از توابع زیر یک به یک است. در مورد (آ) و (ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

$$\text{ا) } f(x) = 1 - x^2 \quad \text{ب) } g(x) = \sqrt{2x-3} \quad \text{ج) } h(x) = \frac{x+6}{3x-4}$$

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x) = x$ یک به یک نیست اما می توانیم دامنه تابع را به بازه $[-\infty, 0]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به دست آوریم. همچنین می توانیم دامنه آن را به بازه $[0, \infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.



تمرین در کلاس

۱. کدامیک از توابع زیر یک به یک هستند.

$$\begin{aligned} \text{آ) } f(x) &= x^2 - 2x & x \geq 0 \\ \text{ب) } f(x) &= \frac{x^2 - 4}{2x^2} & x \geq 0 \end{aligned}$$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } y &= |x-2| & \text{ب) } y &= (x+3)^2 & \text{ج) } y &= \sin x \\ \text{د) } y &= \cos x & \text{ه) } y &= |x| + 2 \end{aligned}$$

اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد، g تابعی است که برعکس f عمل می کند، یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$. این ویژگی باعث می شود نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز

فصل دوم - نسخه دوم

ربع اول و سوم شود. به خاطر این ویژگی با در دست داشتن نمودار یک تابع وارون پذیر می توانیم نمودار تابع وارون آن را رسم کنیم.

بحث در کلاس

اگر f تابعی وارون پذیر و وارون آن تابع g باشد، آیا g نیز وارون پذیر خواهد بود؟ وارون g چه تابعی خواهد بود؟

محاسبه تابع وارون

در ریاضی ۲ یادگرفته اید که اگر تابعی یک به یک مانند f به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب داده شده باشد، برای بدست آوردن f^{-1} ، جای مولفه های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض می کنیم به عبارت دیگر برای هر تابع یک به یک f تابع f^{-1} به صورت زیر تعریف می شود.

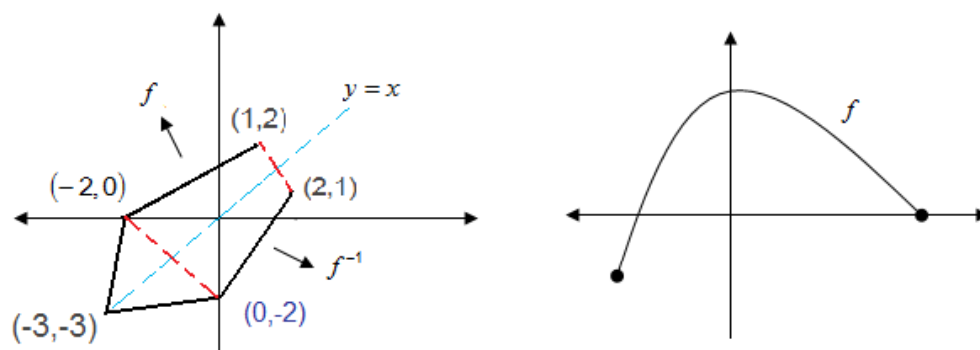
$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

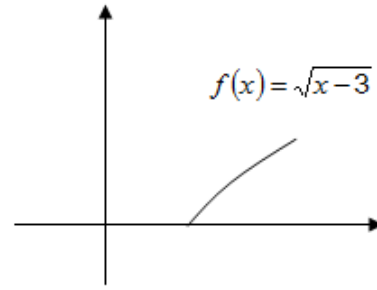
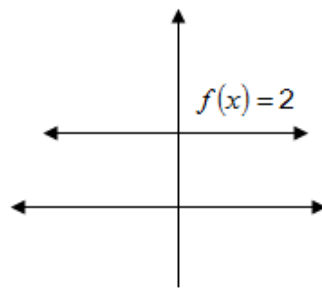
با توجه به تعریف f^{-1} ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شده باشد برای به دست آوردن

نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم.

تمرین در کلاس

ابتدا تعیین کنید که کدامیک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y = x$ برای سهولت استفاده کنید.

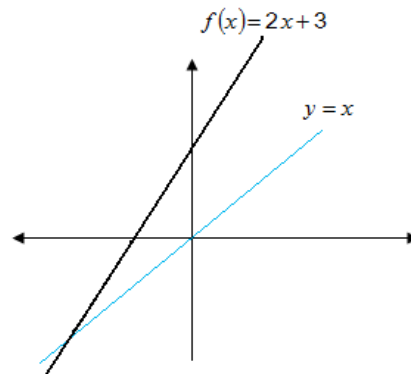




یافتن ضابطه تابع وارون

فعالیت

نمودار تابع خطی $f(x) = x +$ داده شده است.



۱. وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.
۲. معادله ای برای وارون این تابع به دست آورید. می توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(0, 3)$, $(1, 5)$ روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(3, 0)$, $(5, 1)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارند و نمودار f^{-1} یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطه f^{-1} در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد.

تابع $f(x) = x +$ را در نظر می گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد داده شده اند. همان طور که می دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارن f در نظر بگیریم جدولی به دست می آید که در آن جای مقادیر متناظر y, x تغییر کرده است.

x	y
2	7
1	5
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
-1	1
-2	-1
x	$2x+3$
a	$2a+3$

جدول تابع f

y	x
7	2
5	1
$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	0
1	-1
-1	-2

جدول تابع f^{-1}

زوج مرتب $(1,5)$ به f تعلق دارد و زوج $(5,1)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول بعد این فرآیند را بهتر توصیف می کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم ، ضابطه آن به صورت : $g(y) = \frac{y-3}{2}$ می باشد. مشخص است که y ها از برد f اختیار می شوند.

y	$\frac{y-3}{2} = x$
7	2
5	1
$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	0
1	-1
-1	-2

همان طور که می دانید g را به صورت های زیر هم می توان نمایش داد:

$$g(a) = \frac{a-}{2}, \quad g(b) = \frac{b-}{2}, \quad g(t) = \frac{t-}{2}$$

آن چه که مهم است این است که دامنه g همان برد f است بنابراین می توان نوشت:

$$g(x) = \frac{x-}{2} \quad x \in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با f^{-1} نمایش می دهیم داریم: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می بریم.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارن یک تابع وارونپذیر مانند f در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y به دست می آوریم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

فصل دوم - نسخه دوم

مثال: ضابطه وارن تابع $f(x) = 2x + 3$ را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = x + & \Rightarrow y = x + \\ \Rightarrow x = y - & \\ \Rightarrow x = \frac{y -}{ } & \\ \Rightarrow g(y) = \frac{y -}{ } & \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x -}{ } & \end{aligned}$$

تمرین در کلاس

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون را آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{x -}$ ب) $g(x) = \frac{x -}{x +}$

فعالیت

۱. اگر $f(x) = x +$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x) = \frac{x -}{ }$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۲. اگر $f(x) = \sqrt{x -}$ ثابت کنید که f وارونپذیر است و وارون آن تابع $g(x) = \frac{x +}{ }$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۳. به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ چه حدس می زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می دهد که قضیه زیر برقرار است.

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم:

$$D_g = R_f \quad , \quad R_g = D_f$$

و برای هر x در دامنه f داریم: $g(f(x)) = x$

و برای هر x در دامنه g داریم: $f(g(x)) = x$

تذکر: توجه داریم که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

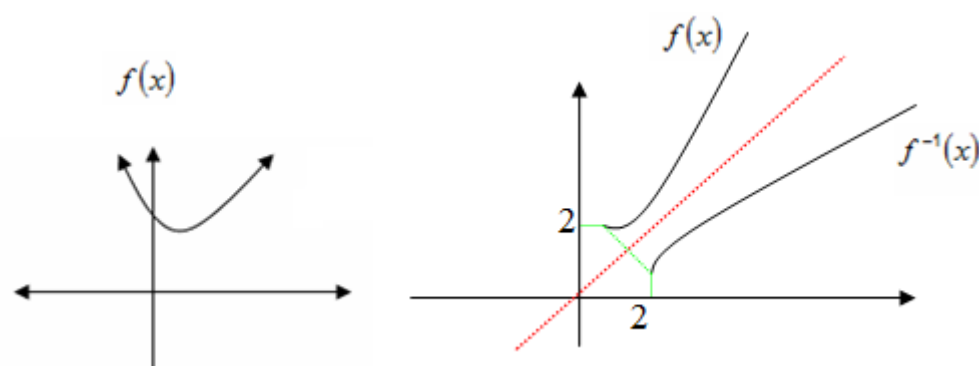
تمرین در کلاس

۱. اگر $f(x) = \frac{7}{x} + 3$, $g(x) = \frac{7}{x-3}$, $h(x) = \frac{x-3}{7}$ ثابت کنید که g, f وارون یکدیگرند ولی h, g وارون یکدیگر نمی باشند.

۲. آیا دو تابع $f(x) = \frac{2}{5}$, $g(x) = \frac{5}{2}$ وارون یکدیگرند؟

۳. اگر $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند، نشان دهید $m_1m_2 = 1$.

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک به یک نیست. زیرا $f(0) = f(3)$ ولی $\neq$. یک به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می شود.



اما این تابع روی دامنه $[1, \infty)$ یک به یک است و می توانیم معادله ای برای f^{-1} به دست آوریم. نمودار بالا یک به یک بودن f را روی دامنه $[1, \infty)$ نشان می دهد و با روش جبری نیز می توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \\ &\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در نتیجه گیری های بالا از این که $1 \leq x_1$ و $1 \leq x_2$ استفاده کرده ایم (چگونه؟). برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون داریم:

فصل دوم - نسخه دوم

$$f(x) = x - x + \Rightarrow y = (x -) + \Rightarrow y - = (x -) \Rightarrow x - = \pm \sqrt{y -}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x - = \sqrt{y -}$ در نتیجه

$$x = \sqrt{y - 2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می شود که :

$$D_f = [1, +\infty) = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = [2, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

بنابر این:

$$f^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

درستی تساوی $f(f^{-1}(x)) = x$ با محاسبه زیر روشن می شود.

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x - 2} + 1) = (\sqrt{x - 2} + 1 - 1)^2 + 2 = (\sqrt{x - 2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

اثبات درستی رابطه $f^{-1}(f(x)) = x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی چگونه است؟

مسائل

۱- تحقیق کنید که توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ ، $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم

$$f(g(x)) = x \text{ و برای کدام مقادیر } x \text{ داریم } g(f(x)) = x?$$

۲- فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار f^{-1} در کدام ناحیه قرار می گیرد؟

۳- نشان دهید تابع $f(x) = |x - 2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴- ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-}{x+}$ یک به یک است و با محاسبه f^{-1} ، دامنه و برد f را به دست آورید.
(دامنه f^{-1} = برد f)

فصل دوم - نسخه دوم

۵- در هر یک از حالت های زیر نشان دهید که توابع f, g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2$ $x \geq 0$

۶- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

ج) $0 < f(1)$.

۷- وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست آورید.

الف) $f(x) = (x+5)^2$ $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$ $x \geq 1$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۸- نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

۹- تابع $f(x) = ax + b$ $a \neq 0$ داده شده است همه مقادیر a, b را بیابید که برای آنها $f^{-1}(x) = f(x)$

۱۰- در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۱- اگر $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 7$ توابع زیر را محاسبه کنید.

(الف) $(f \circ g)^{-1}$ (ب) $(g \circ f)^{-1}$ (ج) $g^{-1} \circ f^{-1}$ (د) $f^{-1} \circ g^{-1}$

۱۲- اگر سنگی از ارتفاع 100 متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه

$$h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$$

به دست می آید.

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

فصل دوم - نسخه دوم

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می کند؟

توابع چند جمله ای و توابع متناوب

قبلا با توابع خطی آشنا شده اید. هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می آید که آن را تابع ثابت می نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آنها را توابع چندجمله ای می نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله ای هستند.

هرتابع به صورت : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ را یک تابع چندجمله ای از درجه n می نامند.

برای مثال هر تابع خطی مانند $f(x) = a_1 x + a_0$ ، $a_1 \neq 0$ یک تابع چندجمله ای درجه اول می باشد.

درجدول زیر مثال هایی از توابع چندجمله ای ارائه شده است .

مثال	شکل کلی	درجه چند جمله ای
$f(x) = 3$	$f(x) = a$	۰ (توابع ثابت)
$f(x) = \frac{2}{3}x - 5$	$f(x) = a_1 x + a_0$	۱ (خط باشیب a_1)
$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	۲ (سهمی ها)
$f(x) = 7x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - 5$	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	۳
$f(x) = x^4 - x^3 + x$	$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	۴

بارسم نمودار توابع چندجمله ای از درجه ۰، ۱، ۲ و یافتن دامنه و برد آنها آشنا شده اید. دراینجا نمودار

تابع چندجمله ای $f(x) = x^3$ و برخی از توابع چندجمله ای دیگر درجه سوم که به کمک تابع $y = x^3$

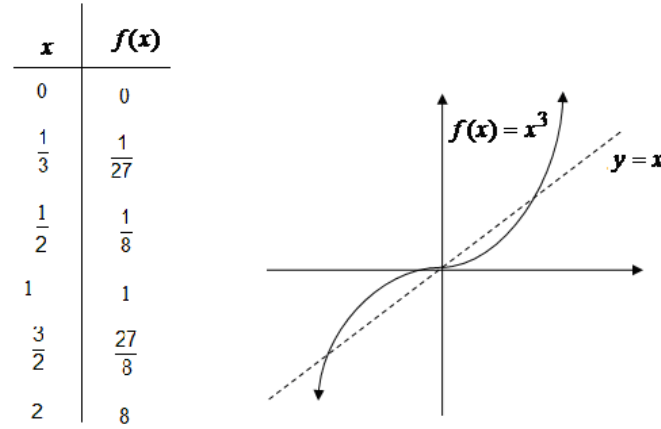
می توان نمودار آنها را رسم کرد مورد بررسی قرار می دهیم.

فصل دوم - نسخه دوم

دامنه تابع $f(x) = x^3$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدا مختصات متقارن است. با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x ، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدا مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_1 < x_2$ می توان نتیجه گرفت $x_1^3 < x_2^3$.

برای $0 < x < 1$ داریم: $0 < x^3 < x$ و برای $x > 1$ داریم $x < x^3$ ، بنابراین نمودار این تابع در بازه $(0, 1)$ زیر خط $y = x$ و در بازه $(1, \infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد.

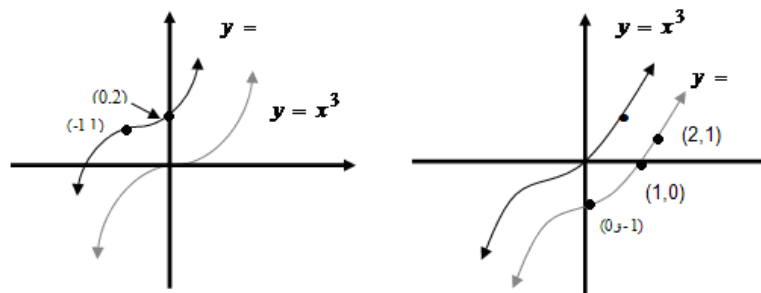
اکنون با کمک نقطه یابی رسم نمودار تقریبی $f(x) = x^3$ به سادگی انجام می شود.

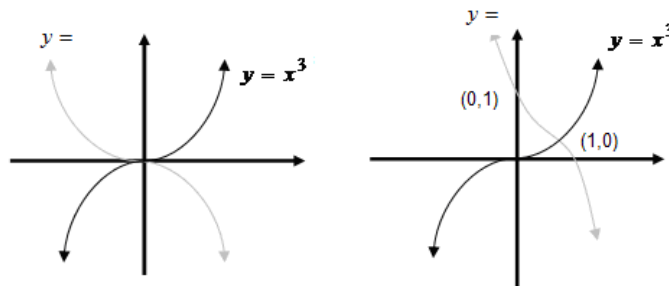


باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون پذیر است و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

تمرین در کلاس

- نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y = x^3$ رسم کنید.
- در هریک از شکل های زیر نمودار تابع $y = x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.





۳. نمودار توابع $y = (x + \frac{3}{2})^3$ و $y = (x-1)^3 + 2$ و $y = 2x^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

حرکت هایی که الگوی خاصی را تکرار می کنند حرکت متناوب می نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل ها، حرکت عقربه های ساعت از این نوع حرکت ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه ها یاری می نماید. بسیاری از پدیده های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان ها از این گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده اند.

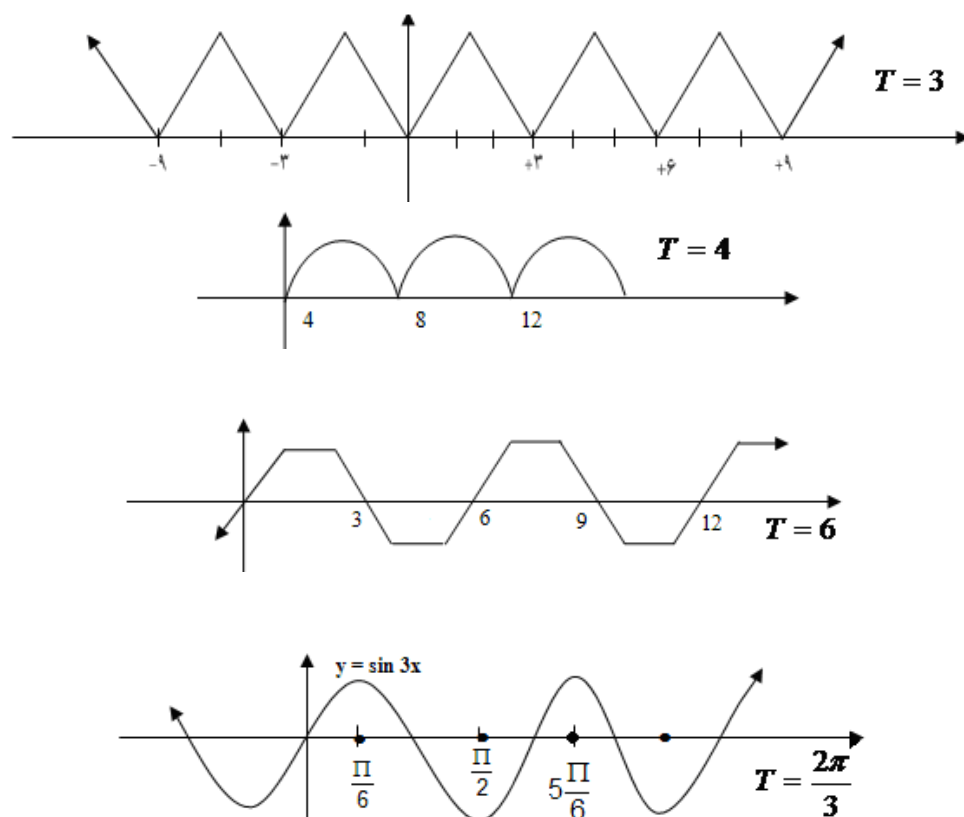
توابعی که بیان کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آنها را تابع های متناوب می نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده اید. در اینجا به طور دقیقتری توابع متناوب را تعریف می کنیم.

تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x+T \in D_f$ و $f(x+T) = f(x)$.

کوچکترین عدد T با خاصیت بالا را دوره تناوب f می نامند.

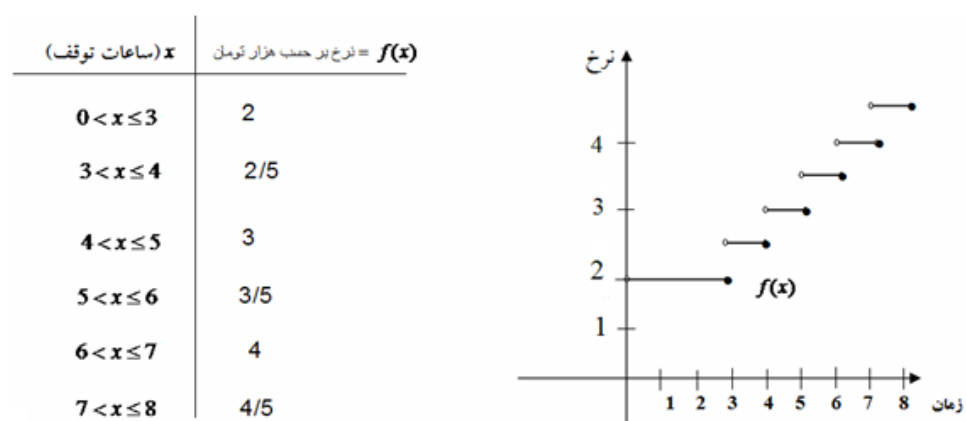
مثال: توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند.

مثال: توابعی که نمودار آنها در زیر آمده است توابعی متناوب با دوره تناوبهای مختلف هستند.



توابع پله ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته های پستی به طور معمول تابعی از وزن آنها است. همچنین نرخ توقف در پارکینگ ها برحسب ساعت توقف اتومبیل ها در آن جا تعیین می شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است . فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزار تومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.



فصل دوم - نسخه دوم

دامنه این تابع $[0,8]$ و برد آن مجموعه $\{2, 2/5, 3, 3/5, 4, 4/5\}$ می باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد. توابعی که نمودار آنها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله ای معروف هستند.

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پله ای می نامند.

گونه خاصی از توابع پله ای تابع جزء صحیح می باشد. ابتدا جزء صحیح یک عدد را تعریف می کنیم و بعد از آن تابع جزء صحیح را تعریف می کنیم.

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهیم.

برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} [3,2] &= 3 & [4,9] &= 4 & [7] &= 7 & [\sqrt{3}] &= 1 \\ [-1,5] &= -2 & [1-\sqrt{2}] &= -1 & [-2] &= -2 & [-2/95] &= -3 \end{aligned}$$

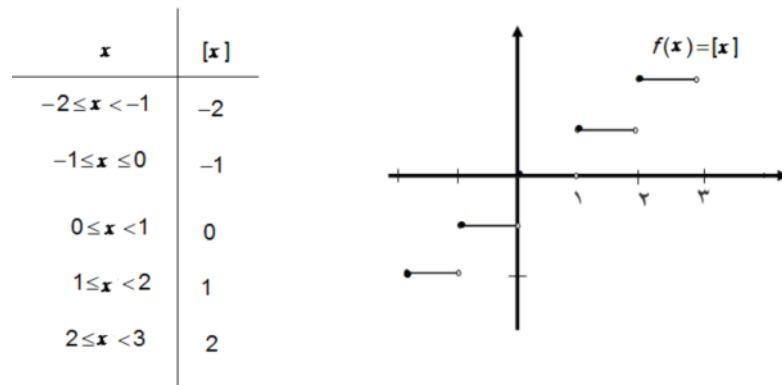
جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می شود.

برای هر عدد حقیقی x ، یک عدد صحیح p موجود است که $p \leq x < p+1$. p را جزء صحیح x می نامند و آن را با نماد $[x]$ نشان می دهند.

$$\begin{array}{c} \times \quad \times \quad \times \\ \hline p \quad x \quad p+1 \end{array} \longrightarrow$$

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح نامیده می شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $(-2, 3]$ رسم شده است.



تمرین در کلاس

یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار و یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می کند. تابعی بنویسید که هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال: تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم می کنیم.

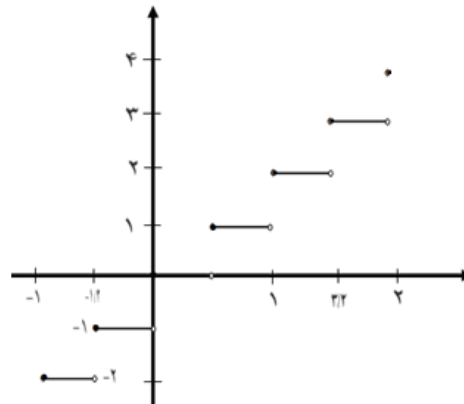
می دانیم که نمودار ای تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{1}{2}$ به دست می آید. اگر $-1 \leq x \leq 2$ آنگاه $-2 \leq 2x \leq 4$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[2x]$ مقدارهای -۲ و -۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد.

$$[2x] = -2 \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

با استدلال مشابه داریم:

$$[2x] = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0, \quad [2x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

بنابراین این تابع در بازه های متوالی به طول $\frac{1}{2}$ که از نقطه -۱ شروع می شود به ترتیب مقدارهای -۲ و -۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



۱. تابع پله ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$

۲. نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید .

۳. وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴. نمودار توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید .

الف) $y = 2[x]$ ب) $y = [-x]$

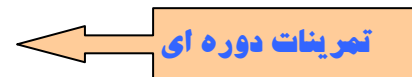
۵. نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶. نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{1}{2}$ ب) $y = 2[x] + 1$

۷. نمودارهای دو تابع $y = [x - 3]$ و $y = [x] - 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۸. یک شرکت پستی برای ارسال بسته های پستی تا کمتر از یک کیلو گرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلو گرم ۶ هزار تومان و برای بسته های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلو گرمی باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله ای برای آن بیابید.



۱. قرار است یک مزرعه مستطیلی شکل برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۲۰۰ متر نرده چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چقدر در نظر بگیریم تا بزرگترین مساحت ممکن برای این مزرعه را به دست آید؟

با طی مراحل زیر، این مسئله را حل کنید.

آ. جدول زیر را تکمیل کنید.

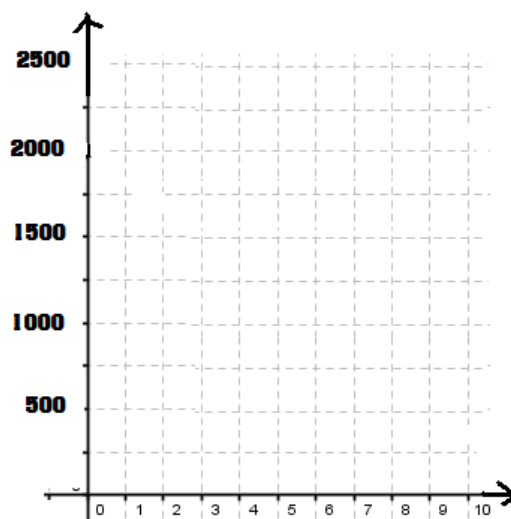
x یک ضلع مستطیل	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
ضلع دیگر				۷۰							
S مساحت				۲۱۰۰							

ب. مساحت این مستطیل را به صورت تابعی از x به دست آورید.

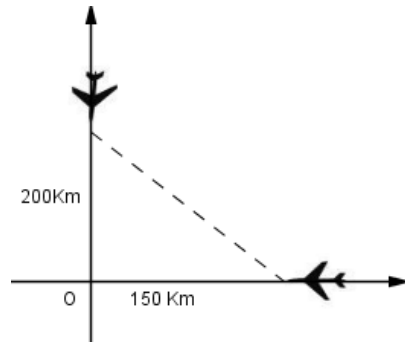
ج. دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

د. آیا از روی نمودار می توانید بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه گل را به دست آورید؟

ه. به روش جبری و با کمک ضابطه تابع، بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه را به دست آورید.



۲. دو هواپیما مطابق شکل در ارتفاع یکسان در دو مسیر عمود برهم، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه O فاصله دارند.



- الف) پس از ۲۰ دقیقه فاصله بین دو هواپیما چقدر است؟
 ب) فاصله بین دو هواپیما را بر (حسب کیلومتر) به عنوان تابعی از زمان (دقیقه) به دست آورید. (شکل زمان $t = 0$ را نشان می دهد).
 ج) از طریق این تابع استدلال کنید که این دو هواپیما به هم برخورد نخواهند کرد.

۳- اگر $h(x) = (2x + 5)^2$ و $g(0) = 5$ و $h(x) = (fog)(x)$ بنویسید به قسمی که

۴- قیمت معمولی یک کالا x (هزار) تومان است. فرض کنید

$$f(x) = x - 400, \quad g(x) = 0.75x$$

- آ) f, g چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کنند؟
 ب) fog را بیابید و توضیح دهید که fog چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند.
 ج) gof چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند؟
 ۵- فرض کنید f, g توابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید:

الف) اگر f, g صعودی باشند آنگاه fog صعودی است.

ب) اگر f, g نزولی باشند آنگاه fog صعودی است.

ج) اگر f صعودی و g نزولی باشد آنگاه fog نزولی است.

د) برای هر یک از موارد (الف) و (ب) و (ج) مثالی ارائه کنید.

۶- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f روی بازه $[a, b]$ صعودی باشد، در هیچ نقطه ای محور x ها را قطع نمی کند.

ب) اگر f روی بازه $[a, b]$ صعودی باشد، حداکثر در یک نقطه محور x ها را قطع می کند.

۷- تحت چه شرایطی تابع خطی $f(x) = ax + b$ زوج است؟ تحت چه شرایطی فرد است؟

۸- اگر $h(x) = x + 3, g(x) = x^2 + 2, f(x) = \sqrt{x - 1}$ ، تابع $fogoh$ را به دست آورید.

فصل دوم - نسخه دوم

۹- فرض کنید $h(x) = (f(x))^2 + g(x)$ که توابع g, f ممکن است زوج یا فرد باشند.

الف) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع زوج می شود؟

ب) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع فرد می شود؟

۱۰- الف) فرض کنید که g یک تابع زوج باشد و $h = fog$. آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان

اظهار نظر قطعی کرد؟

ب) اگر g یک تابع فرد باشد و $h = fog$ ، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان اظهار نظر

قطعی کرد؟

ج) اگر g, f دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن fog چه می توان گفت؟

۱۱- تابعی مانند f رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) دامنه $f = [-2, 20]$

ب) برد $f = [-8, 14]$

ج) $f(2) = f(8) = 0$

د) f در بازه $[10, 16]$ و $[0, 4]$ صعودی باشد.

ه) f در بازه $[-2, 0]$ ثابت باشد.

و) f در بازه $[4, 10]$ نزولی باشد.

ز) برای هر $x \in [2, 8]$ ، $f(x) < 0$.

ح) برای هر $x \in [16, 20]$ و $x \in [-2, 0]$ ، $f(x) > 0$.

۱۲- فرض کنید که $f(x)$ روی بازه $[-2, 7]$ صعودی باشد.

الف) دامنه تابع $y = f(x+3)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ب) دامنه تابع $y = f(x-4)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ج) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = -f(x)$ چه می توان گفت؟

د) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = f(-x)$ چه می توان گفت؟

۱۳- هزینه اجاره ی در بست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع $C(x) = \frac{100+5x}{x}$ داده می شود که

در آن x تعداد افراد در یک گروه و $C(x)$ بر حسب هزار تومان است و داریم:

$$x \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$$

$C^-(x)$ را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می دهد؟

فصل دوم - نسخه دوم

۱۴- یک سیلندر به شکل استوانه در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است. شعاع قاعده این سیلندر را با x نشان می دهیم.

الف) حجم این سیلندر استوانه ای شکل را به عنوان تابعی از x به دست آورید. برای شعاع قاعده ۱۰ متر حجم استوانه چقدر است؟

ب) $V^{-}(x)$ را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی برابر π متر مکعب نیاز داشته باشیم، با استفاده از هر یک از فرمول ها که ساده تر است شعاع را بیابید.

۱۵- اگر f و g دو تابع یک به یک باشند ثابت کنید:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

۱۶- درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ) یک تابع زوج می تواند وارون پذیر هم باشد.

ب) اگر f روی بازه $[,]$ صعودی باشد f^{-1} روی بازه $[f(0), f(5)]$ صعودی است.

ج) اگر g روی بازه $[,]$ نزولی باشد، g^{-1} روی بازه $[g(0), g(5)]$ نزولی است.

د) اگر f, g وارون یکدیگر باشند، دامنه آنها با هم برابر است.

۱۷- اگر $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ ، $f^{-1}(x)$ بیابید. تحت کدام شرایط برای a, b, d داریم $f = f^{-1}$

۱۸- وزن ایده آل w برای مردان (برحسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد h (بر حسب سانتی متر) به صورت تقریبی از رابطه $w(h) = 0.9h - 88$ به دست می آید.

الف) وزن ایده آل برای یک مرد 170 سانتی متری چقدر است؟

ب) h را به عنوان تابعی از w به دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می دهد؟

ج) با نشان دادن $h(W(a)) = a$ ، $h(W(b)) = b$ ثابت کنید که $h(w), w(h)$ وارون یکدیگرند.

د) قد ایده آل مردی که وزن او کیلوگرم است چند سانتی متر است.

(رابط وزن ایده آل برای زنان به صورت $W(h) = 0.9h - 82/5$ است)

۱۹- دو تابع مانند f, g مثال بزنید به طوری که دامنه تابع $f - g$ برابر مجموعه زیر باشد.

$$\{x | x \neq -3, x \neq 2\}$$

۲۰- توابعی مانند f, g بیابید که برای آنها داشته باشیم

$$(fog)(x) = (gof)(x) = x$$

فصل دوم - نسخه دوم

۲۱- در هر یک از حالت های زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به گونه ای به دست آورید که شرط خواسته شده برقرار گردد.

$$\text{ا)} f(f(x)) = 4x + 3$$

$$\text{ب)} f(1-x) = 5x + 1 \quad \text{ج)} f(2x+3) = 3x - 2$$

۲۲- تعداد باکتری ها در یک غذای منجمد با تابع

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 500 \quad 2 \leq d \leq 14$$

وقتی که غذا از انجماد خارج می شود دما با تابع $d(t) = 4t + 2 \quad 0 \leq t \leq 3$ داده می شود که t زمان بر حسب ساعت است . مطلوبست :

آ) تابع مرکب $n(d(t))$

ب) تعداد باکتریها در غذا وقتی که $t = 2$.

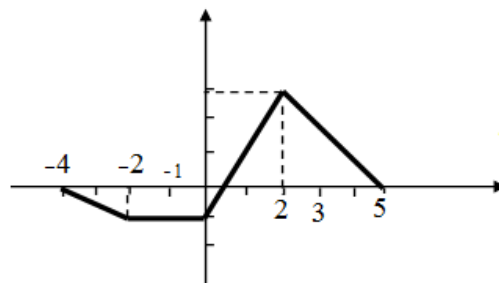
ج) پس از چه زمانی تعداد باکتریها به 2420 می رسد ؟

۲۳. ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|}$ تابعی زوج است و با استفاده از آن برد تابع را بدست آورید.

۲۴. ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد تابع را بدست آورید.

۲۵. نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه توابع داده شده را معلوم کنید و

نمودار آن ها را رسم کنید.



$$\text{ا)} y = |f(x)|$$

$$\text{ب)} y = f(|x|)$$

$$\text{ج)} y = f(-x)$$

$$\text{د)} y = -f(x)$$

۲۶- اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید که در هر یک از حالات زیر آیا g زوج یا فرد یا آن که نه زوج است و نه فرد.

$$\text{ا)} g(x) = -f(x)$$

$$\text{ب)} g(x) = f(-5x)$$

$$\text{ج)} g(x) = f(x) + 3$$

$$\text{د)} g(x) = -f(x-3)$$

۲۷. تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را روی دامنه $[1, \infty)$ در نظر بگیرید.

آ. با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون پذیر است و برد آن را به دست آورید.

ب. با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را به دست آورید.

فصل دوم - نسخه دوم

ج. تابع وارون f را با g نشان دهید و برای یک نقطه دلخواه از دامنه g مانند x قرار دهید $g(x) = y$.

با توجه به آن که داریم $x = f(y)$ ، y را بر حسب x حساب کنید.

د. ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۲۸. ثابت کنید که تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آن را بدست آورید.

۲۹. دو تابع f, g وارون یکدیگرند. آیا توابع $f \circ g, g \circ f$ با هم مساویند؟

۳۰- برای هر عدد صحیح q ، نشان دهید $[x + q] = [x] + q$.