

فصل سوم

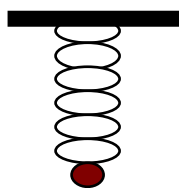
مثلثات

۱. توابع مثلثاتی
۲. تابع تانژانت و کتانژانت
۳. اتحادهای مثلثاتی
۴. معادلات مثلثاتی
۵. تابع وارون توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی

بیان ریاضی بسیاری از حرکتهای متناوب در طبیعت، با توابع مثلثاتی انجام می شود. مثلا حرکت رفت و برگشتی یک آونگ، حرکت سیارات به دور خورشید، نوسانات یک فنر همگی از طریق توابع مثلثاتی قابل بیان هستند.

مثال: فرض کنید وزنه ای را از یک فنر آویزان کرده ایم و فنر به حال تعادل رسیده است.

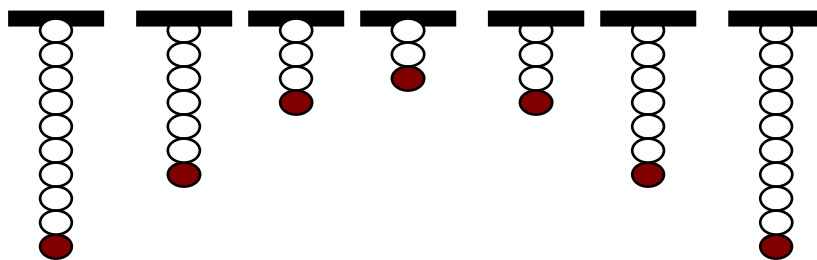


اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده می شود و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک وزنه یک

حرکت نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدا محاسبه ارتفاع وزنه را حالت تعادل وزنه بگیریم، و

لحظه $t = 0$ را لحظه رد شدن وزنه از حالت تعادل بگیریم تابعی که ارتفاع وزنه را در هر لحظه

مشخص می کند به صورت $y(t) = A \sin(Bt)$ است



تمرین در کلاس

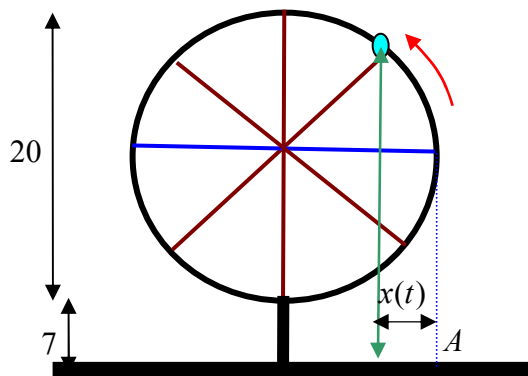
فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می

چرخد. فرض کنید پایتترین نقطه چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و

فصل سوم - نسخه دوم

فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t = 0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.

می خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.



۱. پس از گذشت t ثانیه، کمانی که کابین طی می کند چند رادیان است؟
۲. پس از گذشت t ثانیه، کابین چند متر بالای قطر افقی قرار دارد؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد این عدد را منفی حساب کنید).
۳. تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می دهد بنویسید.
۴. اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

مثال: می دانیم که تغییرات طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم این مقادارها تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می یابند تا به روز اول زمستان برسیم و مجددا بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می یابند. این حرکت تناوبی است و می توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم.

فصل سوم - نسخه دوم

فرض کنید t نشان دهنده روزهای سال باشد و $t = 0$ نشان دهنده روز اول فروردین و $t = 364$ نشان دهنده روز آخر سال باشد. طول روز t ام (بر حسب ساعت) را با $L(t)$ نشان می دهیم و فرض کنید به ازای برخی اعداد مانند A و B و C داریم $L(t) = A \sin(Bt) + C$. با داشتن اطلاعات زیر سعی می کنیم A و B و C را به دست آوریم.

روز	اول فروردین	اول تیر	اول دی
طول روز(ساعت)	۱۲/۲۵	۱۵/۵	۹

تمرین در کلاس

۱. با توجه به آن که دوره تناوب تابع $L(t)$ ، $\frac{2\pi}{B}$ است نشان دهید $B \approx 0/02$.

۲. نشان دهید بیشترین مقدار $L(t)$ برابر $A + C$ و کمترین مقدار آن $-A + C$ است و نتیجه

$$\text{بگیرید } C = 12/25, A = 3/35$$

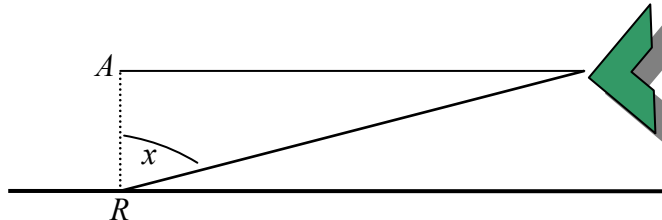
۳. تابع $L(t)$ را بنویسید و طول روز را در ۵ آذر حساب کنید.

تابع تانژانت و کتانژانت

یکی از توابع هم مثلثاتی تابع تانژانت است. به ازای هر مقدار x بنا به تعریف:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

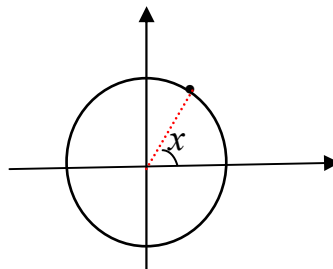
برج مراقبت یک فرودگاه هواپیمایی را که در حال نزدیک شدن به فرودگاه است ردیابی می کند. رادار در نقطه R فرودگاه در نقطه A است و ۳ کیلومتر با هم فاصله دارند.



۱. فاصله هواپیما با فرودگاه را بر حسب زاویه ای که رادار طبق شکل به دست می آورد حساب کنید.

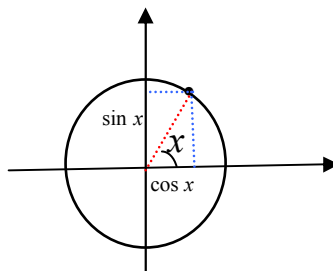
۲. اگر رادار زاویه 45° درجه را نشان دهد، فاصله هواپیما با فرودگاه چقدر است؟

مقدار $\tan x$ را می توان در دایره مثلثاتی به شکل هندسی نمایش داد. با رسم یک دستگاه مختصات و دایره واحد به مرکز مبدا، هر مقدار x که به عنوان زاویه ای بر حسب رادیان در نظر گرفته شود نقطه ای از دایره مثلثاتی را معین می کند.

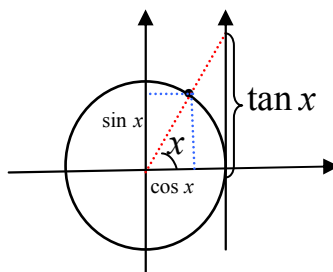


با رسم خطهایی عمود بر دو محور، از این نقطه مقدارهای $\sin x$ و $\cos x$ مشخص می شوند.

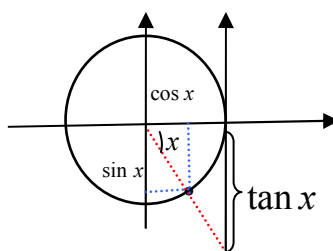
فصل سوم - نسخه دوم



با رسم خط مماس بر دایره مثلثاتی در نقطه $(1, 0)$ و ساختن محوری جدید، اگر خطی را که مبدا را به نقطه روی دایره وصل می کند ادامه دهیم تا این محور جدید را قطع کند، عرض نقطه برخورد مقدار $\tan x$ را نشان می دهد.



درستی این مطلب از طریق رابطه تشابه در مثلثهای قائم الزاویه ای که ساخته شده اند قابل بررسی است. درستی علامت مقدار تانژانت نیز با بررسی آن، وقتی زاویه در ربعهای دیگری قرار می گیرد قابل انجام است. مثلاً وقتی که زاویه در ربع چهارم قرار می گیرد مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی است، پس مقدار تانژانت منفی است.



از آنجا که محورهای بالا مقدارهای سینوس و کسینوس و تانژانت را نمایش می دهند، در دایره مثلثاتی این محورها را محورسینوسها و محور کسینوسها و محور تانژانتها می نامند. از روی شکل مشخص

فصل سوم - نسخه دوم

است که برای زاویه هایی که مضرب صحیح و فردی (مثبت یا منفی) از $\frac{\pi}{2}$ هستند مقدار تانژانت تعریف

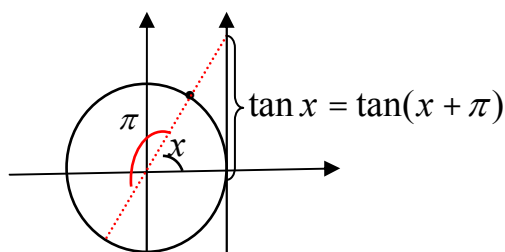
نمی شود، زیرا در این نقاط خط واصل از مبدا به نقطه روی دایره با محور تانژانتها موازی است و آن

را قطع نمی کند. از طریق جبری نیز مشاهده می کنیم که در این زاویه ها کسینوس صفر است و کسر

$\frac{\sin x}{\cos x}$ معنا ندارد. بنابراین دامنه تعریف تابع $\tan x$ اعداد به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ را (k اعداد صحیح

هستند) در بر ندارد.

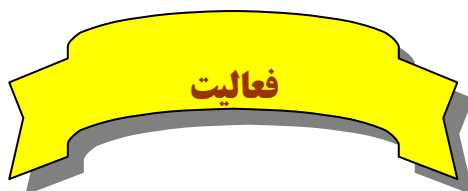
از روی شکل همچنین مشاهده می کنیم که برای دو زاویه x و $x + \pi$ مقدار تانژانت مساوی است.



به طور جبری نیز می توان این رابطه را به دست آورد.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

از این تساوی نتیجه می شود $\tan x$ تابعی متناوب است و π یک دوره تناوب آن است.



در این فعالیت می خواهیم چگونگی تابع تانژانت را در یک دوره تناوب آن، مانند بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ،

بررسی کنیم.

۱. از طریق شکل و محور تانژانتها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از صفر شروع شوند و به

طور مداوم افزایش یابند تا به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقدارهای $\tan x$ چگونه تغییر می کنند.

فصل سوم - نسخه دوم

۲. آیا تابع تانژانت روی بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است؟

۳. از طریق شکل و محور تانژانتها توضیح دهید که وقتی مقادیرهای x از صفر شروع شوند و به طور

مداوم کاهش یابند تا به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقادیرهای $\tan x$ چگونه تغییر می کنند.

۴. آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ صعودی است؟ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ صعودی

است؟

۵. آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ تابعی زوج یا فرد می باشد؟

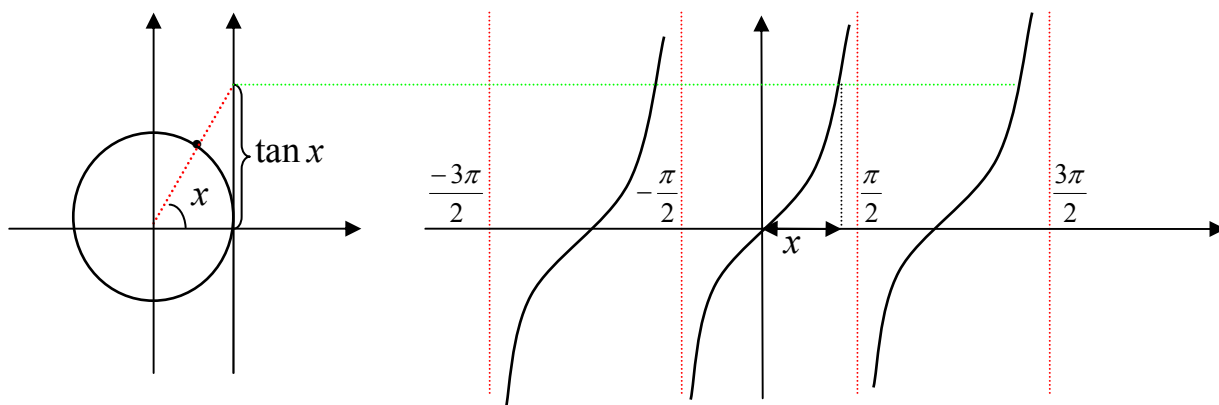
۶. با تکمیل جدول زیر و یافتن مقدار $\tan x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه

آن رسم کنید.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$							

با توجه به اطلاعاتی که در فعالیت قبل نسبت به تابع تانژانت به دست آورده اید، نمودار تقریبی آن به

شکل زیر خواهد بود.



فصل سوم - نسخه دوم

یکی دیگر از توابع مهم مثلثاتی تابع کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

این تابع شباهتهای بسیاری به تابع تانژانت دارد و خواص آن شبیه تابع تانژانت است. در زاویه هایی که

تابع تانژانت ناصفر است مقدار کتانژانت وارون مقدار تانژانت است.

تمرین در کلاس

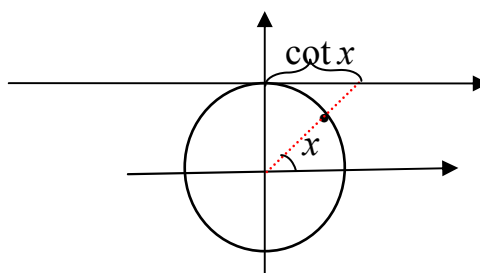
۱. نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد، غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که k عددی صحیح

است.

۲. نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.

۳. نشان دهید مقدار $\cot x$ از طریق محوری که در زیر رسم شده است و آن را محور کتانژانتها می نامند

به دست می آید.



۴. از طریق محور کتانژانتها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع

شوند

و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند، مقدارهای $\cot x$ چگونه تغییر می کنند.

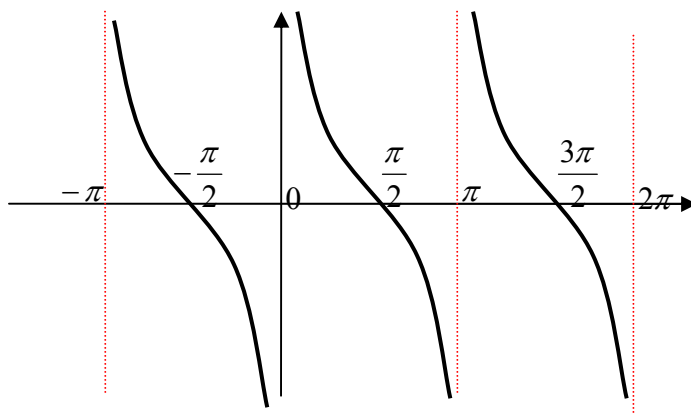
۵. وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0, \pi)$ چگونه است؟

۶. با یافتن مقدار $\cot x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

۷. درستی تساوی $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو

تابع $\tan x$ و $\cot x$ را توضیح دهید.

با توجه به نتایجی که از تمرین بالا به دست می آید نمودار تابع کتانژانت به شکل زیر است.



اتحادهای مثلثاتی

حل یک مسئله

اگر زاویه ای دو برابر شود، نسبتهای مثلثاتی آن چگونه تغییر می کنند؟

کسی که اولین بار به این سوال پاسخ گفت **ابوالوفای بوزجانی** از دانشمندان ایرانی بود که نقش

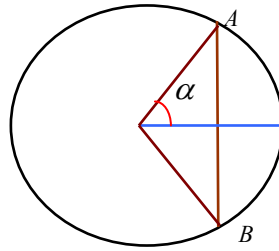
زیادی در گسترش علم مثلثات در آن دوره داشته است. فعالیت زیر بر اساس روش بوزجانی برای

یافتن $\sin 2\alpha$ بر حسب نسبت های مثلثاتی α می باشد.

فعالیت

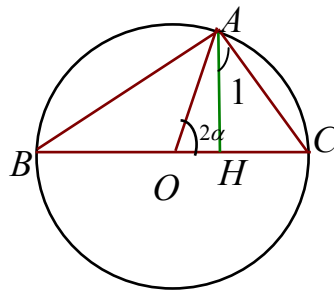
از طریق شکل زیر نشان دهید که اگر AB وترى در دایره واحد باشد که زاویه کمان روبروی آن 2α

باشد، طول وتر $2 \sin \alpha$ است.



۲. در شکل زیر O مرکز دایره واحد و زاویه بین دو شعاع OA و OC برابر 2α است و AH عمود

بر BC است. ابتدا استدلال کنید $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ و $\hat{A}_1 = \alpha$



۳. استدلال کنید که $AC = 2 \sin \alpha$ و $AH = \sin 2\alpha$ و در مثلث قائم الزاویه AHC داریم

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{AH}{AC}$$

۴. نتیجه بگیرید: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

۵. از تساویهای $OH = 1 - HC$ و $OH = \cos 2\alpha$ و $\sin \hat{A}_1 = \frac{HC}{AC}$ ، نتیجه بگیرید:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ اعتبار دارد، ولی برای سایر زاویه ها نیز، با استفاده

از

خواص توابع سینوس و کسینوس، می توان درستی این تساویها را به دست آورد.

مثال: برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{4}$ داریم: $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

فصل سوم - نسخه دوم

مثال: برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{6}$ داریم:

$$2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2 \times \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3}$$

به کمک روابط بالا می توانیم نسبتهای مثلثاتی زاویه های دیگری غیر از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ را هم با دقت حساب کنیم.

مثال: سینوس زاویه ۱۵ درجه را حساب می کنیم.

$$\cos 2 \times 15^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

تمرین در کلاس

۱. با توجه به درستی تساوی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ برای زاویه های حاده، درستی این تساوی را

برای زاویه منفرجه β ثابت کنید. (از زاویه حاده $\alpha = \pi - \beta$ کمک بگیرید).

۲. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

۳. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

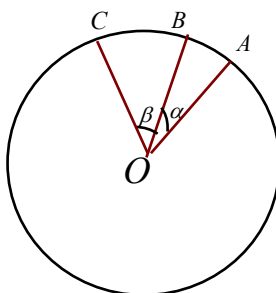
۴. سینوس و کسینوس زاویه $22/5^\circ$ را حساب کنید.

مسئله مهمتر دیگری که بوزجانی به حل آن پرداخت یافتن نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه مانند α

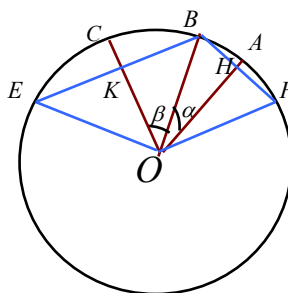
و β بود. روشی که در زیر برای حل این مسئله می آید بر اساس روش بوزجانی است.

فصل سوم - نسخه دوم

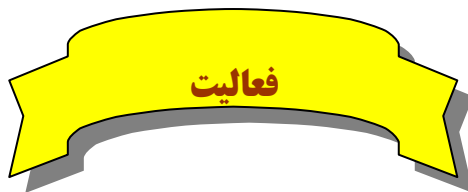
در دایره واحد دو زاویه α و β را به مرکز مبدا پهلو می رسم می کنیم. حالتی را در نظر می گیریم که $\alpha + \beta$ حاده باشد.



اگر زاویه های مرکزی 2α و 2β و $2(\alpha + \beta)$ را بسازیم وتر روبروی آنها مقادیر $2\sin\alpha$ و $2\sin\beta$ و $2\sin(\alpha + \beta)$ را نشان خواهند داد. برای این کار از B به OC و OA عمودی رسم می کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند.



ادامه روش بوزجانی را در فعالیت زیر دنبال می کنیم.



۱. با رسم پاره خطهای EF و KH با استاده از قضیه تالس نتیجه بگیرید این دو پاره خط موازیند و

$$KH = \sin(\alpha + \beta) \text{ است و } EF \text{ نصف } KH$$

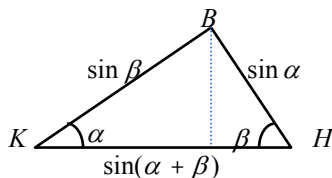
۲. نشان دهید زاویه های \widehat{EFB} و \widehat{KHB} مساویند و برابر β می باشند.

۳. به طور مشابه نشان دهید زاویه های \widehat{FEB} و \widehat{HKB} مساویند و برابر α می باشند.

۴. مثلث BKH را جداگانه در زیر رسم کرده ایم و ارتفاع وارد بر ضلع KH را رسم کرده ایم. با

توجه به آن که طول اضلاع و زاویه های این مثلث معلوم شده اند، نتیجه بگیرید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $\alpha + \beta$ حاده باشد اعتبار دارد، ولی با استفاده از خواص

توابع سینوس و کسینوس می توان درستی آن را برای تمام زاویه ها به دست آورد. مثلاً در حالتی که

α و β حاده هستند ولی $\alpha + \beta$ منفرجه است، می توانیم برای دو زاویه $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ و $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$

که هر دو حاده هستند و $\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta)$ نیز حاده است بنویسیم:

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha' \sin \beta'$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha' + \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha' \sin \beta' \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

برای بقیه حالتها نیز می توان محاسبات مشابهی را انجام داد.

مثال: سینوس زاویه 75° را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



۱. فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. در این فرمول β را

به $-\beta$ تبدیل کنید و نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

۲. با توجه به آن که $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \sin((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$ نتیجه بگیرید برای هر

دو زاویه α و β داریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

۳. ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

۴. ثابت کنید برای هر زاویه α داریم:

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha \quad , \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$



به کمک روابط بالا می توانیم نسبتهای مثلثاتی زاویه های بیشتری را با دقت حساب کنیم.

مثال: تانژانت زاویه 105° را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \tan 105^\circ &= \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} \end{aligned}$$

مثال: کسینوس زاویه $67/5^\circ$ را حساب می کنیم.

فصل سوم - نسخه دوم

داریم $67/5^\circ = 3 \times 22/5^\circ = 3 \times \frac{45^\circ}{2}$. ابتدا کسینوس $22/5^\circ$ را حساب می کنیم.

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

حال کسینوس $67/5^\circ$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \cos 67/5^\circ &= 4 \cos^3(22/5^\circ) - 3 \cos 22/5^\circ = 4 \times \frac{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^3}{8} - 3 \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

روابط به دست آمده در محاسبات نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه ها موجب می شود روابط

جدید دیگری بین توابع مثلثاتی به دست آیند. مثلا برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

با جمع طرفین تساوی نتیجه می شود:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

اتحاد بالا یک عمل ضرب نسبتهای مثلثاتی را به یک عمل جمع نسبتهای مثلثاتی دیگر تبدیل می کند.



۱. با استفاده از فرمول محاسبه $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ نتیجه بگیرید:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

۲. با استفاده از روابط بند (۱) و نتایج قبل با قرار دادن $A = \alpha + \beta$ و $B = \alpha - \beta$

فصل سوم - نسخه دوم

نتیجه بگیرید:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

این اتحاد های مثلثاتی کمک زیادی در ساده سازی عبارتهای مثلثاتی می کنند و از آنها در جهت

تبدیل جمعها به ضربها و برعکس تبدیل ضربها به جمعها استفاده می شود.

مثال: نشان دهید $\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos x \cos 3x$.

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 4x &= 2 \cos \frac{2x+4x}{2} \cos \frac{2x-4x}{2} \\ &= 2 \cos 3x \cos(-x) = 2 \cos x \cos 3x \end{aligned}$$

مثال: عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به صورت حاصلضربی تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin(x+h) + \sin(-x) = 2 \sin \frac{x+h+(-x)}{2} \cos \frac{x+h-(-x)}{2} \\ &= 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

مسائل

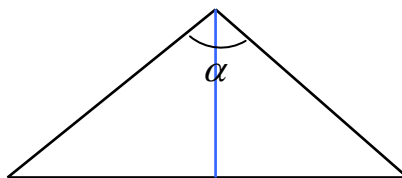
۱. اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$

مقدارهای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

۲. با استفاده از مثلث متساوی الساقین زیر که طول ساقهای آن واحد است و زاویه راس آن α

است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$



۳. نمودار تابع $y = 3 - 6\sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر

است؟

۴. فرمول محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ به

دست آورید.

۵. برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت

کنید.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۶. اگر α زاویه ای در بازه $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

۷. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \quad (\text{ب}) \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{الف})$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad (\text{د}) \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (\text{ج})$$

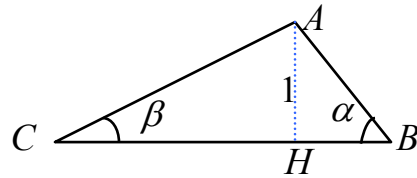
$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \quad (\text{ه})$$

۷. در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ در حالتی که α و β حاده

هستند ارائه می شود. مثلث ABC را به گونه ای می سازیم که زاویه راس B برابر α و زاویه

راس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را

توضیح دهید.

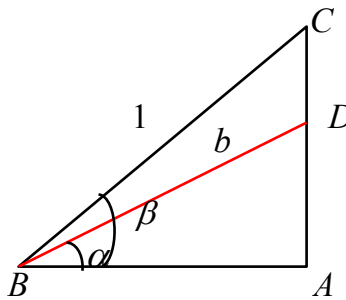


با محاسبه طول پاره خطهای AB و AC و CH و BH بر حسب نسبتهای مثلثاتی α و β و محاسبه مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه سینوسها در مثلث ABC ، فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

۸ در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\beta - \alpha)$ در حالتی که α و β حاده هستند و $\alpha < \beta$ ، ارائه می شود. در شکل زیر زاویه \hat{A} قائمه است و ضلع BC واحد است. طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه طول پاره خطهای دیگری که در شکل دیده می شود و محاسبه مساحت مثلثهایی که در شکل دیده می شوند، با استفاده از تساوی:

$$(\text{مساحت } ADB) - (\text{مساحت } ABC) = (\text{مساحت } BDC)$$

ثابت کنید: $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$



معادلات مثلثاتی

حل یک مسئله

آیا می توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می توان آنها را ساخت؟

معلم از دانش آموزان پرسید: چگونه می توانیم این مسئله را حل کنیم.

زهرا: باید طول ضلع سوم را هم بیابیم تا مثلث مشخص شود و طول این ضلع باید مقداری باشد تا مساحت مثلث ۳ سانتی متر مربع شود.

صدیقه: ولی ما رابطه ای که مساحت مثلث را بر حسب طول اضلاع بیان کند، نمی شناسیم پس راهی برای به دست آوردن ضلع سوم نخواهیم داشت.

معلم: البته چنین رابطه ای وجود دارد ولی چون ما این رابطه را نمی شناسیم مجبوریم دنبال راه حل دیگری بگردیم. اما نکته ای که زهرا بیان کرد آن است که ما باید با روشی مثلث جواب را مشخص کنیم. اگر راهی برای مشخص کردن ضلع سوم نداریم باید دنبال چیز دیگری بگردیم.

زینب: چطور است که زاویه بین آن دو ضلع را بیابیم؟

معلم: فکر بسیار خوبی است، چه راهی برای تعیین این زاویه داریم؟

زهرا: ما می توانیم مساحت یک مثلث را از طریق طول دو ضلع و زاویه بین آنها به دست آوریم.

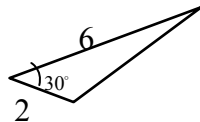
فصل سوم - نسخه دوم

اگر این زاویه را θ بنامیم باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin \theta = 3$$

زینب: از این معادله نتیجه می شود $\sin \theta = \frac{1}{2}$ یعنی θ ، 30° درجه است. پس جواب مسئله مثلث

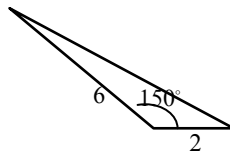
زیر است.



معلم: بله شما توانستید یک جواب برای این مسئله بیابید. اما آیا این معادله جواب دیگری ندارد؟

صدیقه: برای زاویه 150° درجه نیز داریم $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس مثلث دیگری هم با شرایط مورد نظر

مسئله وجود دارد.



معلم: آیا جواب دیگری هم می توانید پیدا کنید؟

زهرا: نه، جواب دیگری وجود ندارد زیرا زاویه های دیگری که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است

نمی توانند زاویه یک مثلث باشند.

در برخی از مسائل مجهول یک زاویه است که اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی آن در دست است.

اگر این اطلاعات را به صورت یک معادله بنویسیم، آن را یک **معادله مثلثاتی** می نامند.

مثال: در مثلثی که طول اضلاع آن 1، 3، $\sqrt{7}$ است، زاویه روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر

است؟

فصل سوم - نسخه دوم

اگر این زاویه را θ بنامیم طبق رابطه کسینوسها داریم:

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos \theta$$

این یک معادله مثلثاتی بر حسب θ است و با حل آن داریم: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ تنها زاویه ای که بتواند

زاویه یک مثلث باشد و کسینوس آن $\frac{1}{2}$ باشد 60° درجه است.

روش حل معادلات مثلثاتی

شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی

از شکلهای $\sin \alpha = \sin \beta$ یا $\cos \alpha = \cos \beta$ یا $\tan \alpha = \tan \beta$ در بیاوریم.

در مثال بالا، معادله مثلثاتی پس از محاسبات جبری به صورت $\cos \theta = \frac{1}{2}$ در آمد که یعنی

$\cos \theta = \cos 60^\circ$. همچنین در مسئله مطرح شده، معادله به صورت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ در آمد که یعنی

$$\sin \theta = \sin 30^\circ$$

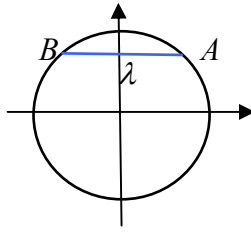
حل یک مسئله

اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ ، این دو زاویه چه رابطه ای با هم دارند؟

مناسب است که این مسئله را از طریق دایره مثلثاتی بررسی کنیم. اگر $\sin \alpha = \sin \beta = \lambda$ ،

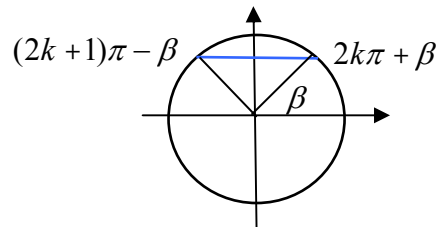
عددی در بازه $[-1, 1]$ است و زاویه هایی که سینوس آنها λ است، طبق شکل زیر آنهايي

هستند نقطه متناظر آنها در دایره مثلثاتی در نقطه A یا B قرار گیرد.



اگر نقطه های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی هر دو در A یا هر دو در B قرار گیرند که معنای آن این است که $\alpha = \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. و اگر نقطه های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی یکی در A و دیگری در B قرار گیرند معنای آن این است که α و $\pi - \beta$ در مضرب صحیحی از 2π اختلاف دارند، یعنی $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. بنابراین اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\sin \alpha = \sin \beta$ دارای جوابهای به صورت $\alpha = 2k\pi + \beta$ و $\alpha = (2k+1)\pi - \beta$ است که k عددی صحیح است.



مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

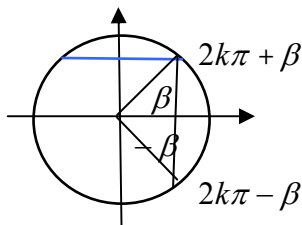
می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $2x = 2k\pi + 3x$ و $2x = (2k+1)\pi - 3x$ هستند. در

نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k+1}{5}\pi$ جوابهای این معادله اند.

با استدلالی مشابه از طریق دایره مثلثاتی می توان نتیجه گرفت که اگر α و β دو زاویه باشند که

$\cos \alpha = \cos \beta$ آنگاه $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = -\beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\cos \alpha = \cos \beta$ دارای جوابهای به صورت
 $\alpha = 2k\pi \pm \beta$ است که k عددی صحیح است.



مثال: معادله $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $x = 2k\pi \pm 2x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و

جوابهای این معادله اند. البته جوابهای به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ خود به خود جوابهای

به صورت $x = 2k\pi$ را در بر دارد.

اگر α و β دو زاویه باشند که $\tan \alpha = \tan \beta$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha = k\pi + \beta$ که k

عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\tan \alpha = \tan \beta$ دارای جوابهای به صورت
 $\alpha = k\pi + \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $5x = k\pi + x$ هستند. پس $x = k\frac{\pi}{4}$.

مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را حل می کنیم.

باید سعی کنیم که با محاسبات جبری، این معادله را به یکی از سه شکل بالا در آوریم. مثلاً

می توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} (1 - \tan \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین معادله دارای دو دسته جواب $\tan \frac{x}{2} = 0$ و $\tan \frac{x}{2} = 1$ است. اولی به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan 0$

و دومی به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{4}$ است. از اولی جوابهای $\frac{x}{2} = k\pi + 0$ و از دومی جوابهای

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } x = 2k\pi \text{ به دست می آیند. در نهایت کلیه جوابها به صورت } x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

خواهد بود.

یک راه حل دیگر آن است که در تمرینات دیدید که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ بنابراین

معادله به صورت $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ در می آید. در نتیجه $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$. از این

معادله جوابهای $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x + \frac{\pi}{4} = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4}$ به دست می آیند که نهایتاً

همان جوابهای $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ می باشند.

مثال: کلیه جوابهای معادله $\cos t(2 \cos t - 9) = 5$ را به دست آورید.

ابتدا معادله را به صورت $2 \cos^2 t - 9 \cos t - 5 = 0$ می نویسیم. این یک معادله درجه دوم بر

حسب $\cos t$ است. یعنی اگر قرار دهیم $x = \cos t$ ، معادله به شکل $2x^2 - 9x - 5 = 0$ در می آید.

با حل این معادله درجه دوم جوابهای $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. حال باید معادلات

$\cos t = 5$ و $\cos t = -\frac{1}{2}$ را حل کنیم. اولین معادله جواب ندارد (چرا؟) و دومین معادله به شکل

$\cos t = \cos \frac{2\pi}{3}$ نوشته می شود پس کلیه جوابها به صورت $t = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ می باشند که k

عددی صحیح است.



۱. اگر θ_0 زاویه حاده ای باشد که $\sin \theta_0 = \frac{3}{5}$ ، کلیه جوابهای معادله $6 \cos x + 8 \sin x = 5$ را بر

حسب θ_0 به دست آورید و آن جوابهایی را که $\pi < x < 2\pi$ تعیین کنید.

۲. کلیه جوابهای معادله $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$ را تعیین کنید.

۳. کلیه جوابهای معادله $\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ را تعیین کنید.

مسائل

۱. معادلات زیر را حل کنید و جوابهایی که در بازه $[-\pi, \pi]$ هستند را تعیین کنید.

الف) $\sin x - \cos x = 1$ ب) $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$ ج) $\tan x \tan 2x = 1$

د) $2 \sin^2 t + 2 \sin t - 1 = 0$ ه) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ و) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

۲. مثلثی رسم کرده ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3}$ است. زاویه های این مثلث را به دست آورید.

وارون توابع مثلثاتی

حل یک مسئله

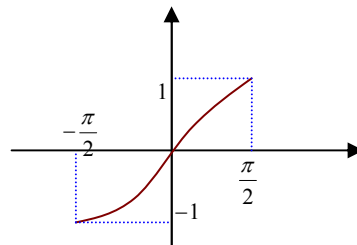
اگر طول وتر یک دایره را بدانیم، زاویه مرکزی روبروی آن چقدر

در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این مسئله را حل کنیم.

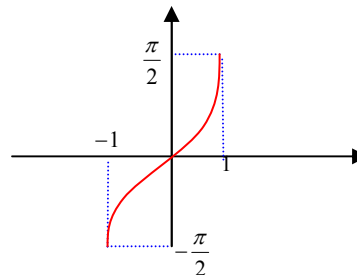
فعالیت

۱. در دایره واحد وتر دلخواهی به طول x رسم کنید. x در چه بازه ای تغییر می کند.
۲. زاویه مرکزی روبروی این وتر را روی شکل نمایش دهید و آن را θ بنامید. θ در چه بازه ای تغییر می کند.
۳. آیا x تابعی از θ است؟ این تابع چیست و دامنه و برد آن چیست؟ آیا این تابع یک به یک است؟
۴. آیا θ تابعی از x است؟ آیا می توانید فرمولی برای این تابع بنویسید؟

در فعالیت بالا متوجه می شویم که لازم است وارونی برای تابع $\sin x$ داشته باشیم، اما این تابع یک به یک نیست و در کل دامنه آن وارون پذیر نیست. اما این تابع روی دامنه های کوچکتر می تواند یک به یک و در نتیجه وارون پذیر باشد. بنا به قرارداد تابع $\sin x$ را روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود می کنند که در این بازه صعودی و یک به یک است.



با این عمل تابعی یک به یک به دست می آید که دامنه آن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و برد آن $[-1, 1]$ است. وارون این تابع با $\sin^{-1} x$ نشان می دهند که تابعی صعودی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است و نمودار آن با قرینه یابی نمودار تابع $\sin x$ نسبت به نیمساز ربع اول به شکل زیر درمی آید.



فصل سوم - نسخه دوم

توجه داشته باشید که $\sin^{-1} x$ را با $\frac{1}{\sin x}$ اشتباه نگیرید. اولی به معنای مقدار تابع وارون $\sin x$ در نقطه x است و دومی به معنای وارون مقدار $\sin x$ است و اینها با هم متفاوتند.

مثال: $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ زیرا $\frac{\pi}{6}$ زاویه ای در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است و $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

مثال: مقدار $\sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right)$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین مقدار $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ را باید حساب کنیم. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ زاویه ای است که سینوس آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و این زاویه در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد. این

زاویه $-\frac{\pi}{3}$ است، پس $\sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

مثال: مقدار $\cos\left(\sin^{-1} \frac{3}{5}\right)$ را حساب می کنیم.

فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، یعنی $\sin^{-1} \frac{3}{5} = \alpha$. بنابراین باید $\cos \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد، داریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین: $\cos\left(\sin^{-1} \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

تمرین در کلاس

- مقدار $\sin^{-1} x$ را با زبان فارسی تشریح کنید.
- در دایره مثلثاتی مقدارهای x و $\sin^{-1} x$ را نشان دهید و روی شکل دامنه و برد این تابع را توضیح دهید.

۳. مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^{-1}(1)$ ب) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

ج) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$ د) $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{12}\right)$

- تابعی که زاویه مرکزی روبروی یک وتر را بر حسب طول وتر به دست می دهد بنویسید.

به طور مشابه برای تابع $\cos x$ نیز لازم است تابع وارونی به دست آوریم. در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این تابع وارون را بسازیم.

فعالیت

۱. آیا تابع $\cos x$ در کل دامنه آن وارون پذیر است؟
۲. با محدود کردن تابع $\cos x$ به بازه $[0, \pi]$ ، آیا تابع جدید یک به یک می شود؟ نظر خود را از طریق دایره مثلثاتی توضیح دهید.
۳. وارون این تابع محدود شده از $\cos x$ را با $\cos^{-1} x$ نشان می دهند. دامنه و برد $\cos^{-1} x$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.
۴. مقدار $\cos^{-1} x$ را به زبان فارسی تشریح کنید.

مثال: $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ ، زیرا $\frac{2\pi}{3}$ زاویه ای در بازه $[0, \pi]$ است و $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

مثال: مقدار $\cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3}))$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(-2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. بنابراین مقدار $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ را باید حساب کنیم.

$\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ زاویه ای است که کسینوس آن $-\frac{1}{2}$ است و این زاویه در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد. این زاویه

$\frac{2\pi}{3}$ است، پس $\cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = \frac{2\pi}{3}$.

مثال: مقدار $\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5})$ را حساب می کنیم.

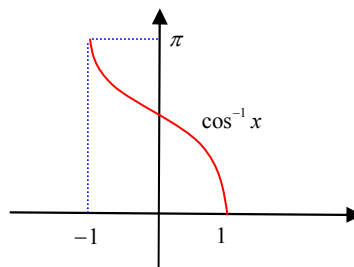
فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد و $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ، یعنی $\cos^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$ بنابراین

باید $\sin \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و α در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد، داریم:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین: $\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

$\cos^{-1} x$ تابعی نزولی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[0, \pi]$ است و نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.



تمرین در کلاس

۱. در دایره مثلثاتی x و $\cos^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\cos^{-1} x$ را توضیح دهید.

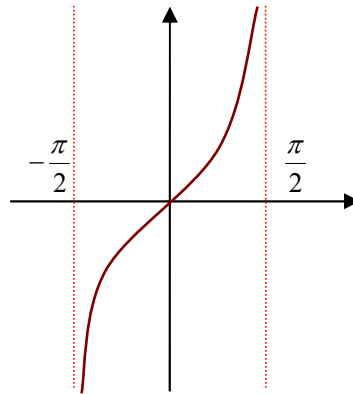
۲. مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\cos^{-1}(-1)$ ب) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

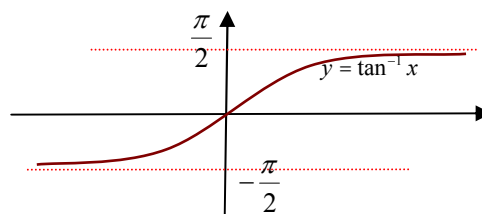
ج) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$ د) $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$

۳. در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید.

تابع تانژانت نیز به خاطر متناوب بودن در کل دامنه خود یک به یک نیست ولی اگر آن را به بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ محدود کنیم تابعی صعودی به دست می آید که یک به یک نیز خواهد بود و دارای وارون می باشد.



وارون این تابع را با $\tan^{-1} x$ نشان می دهند. دامنه این تابع کل \mathbb{R} است و برد آن بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ می باشد. با قرینه یابی نمودار $\tan x$ نسبت به نیمساز ربع اول، نمودار $\tan^{-1} x$ به شکل زیر خواهد بود.



فصل سوم - نسخه دوم

برای هر x ، $\tan^{-1} x$ زاویه ای را نشان می دهد که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد و تانژانت آن برابر x است.

مثال: $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ، زیرا $-\frac{\pi}{4}$ زاویه ای در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است و $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

مثال: مقدار $\tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3})$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ بنابراین مقدار $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ را باید حساب کنیم. $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$

زاویه ای است که تانژانت آن $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است و این زاویه در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد. این زاویه $\frac{\pi}{3}$ است،

$$\text{پس } \tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

مثال: مقدار $\cos(\tan^{-1} \frac{3}{4})$ را حساب می کنیم.

فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، یعنی $\tan^{-1} \frac{3}{4} = \alpha$ بنابراین

باید $\cos \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد، داریم:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{بنابراین: } \cos(\tan^{-1} \frac{3}{4}) = \frac{4}{5}$$



۱. برای هر x ، در دایره مثلثاتی x و $\tan^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع

$\tan^{-1} x$ را توضیح دهید.

۲. مقدارهای زیر را حساب کنید.

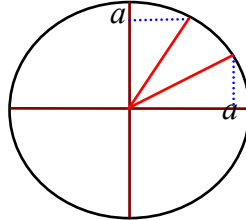
(الف) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (ب) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

(ج) $\tan^{-1}(\tan \frac{5\pi}{4})$ (د) $\sin^{-1}(\tan \frac{\pi}{8})$

۳. آیا تابع $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ وارون پذیر است؟ تابع وارون آن چیست؟

۱. برای هر عدد $0 < a < 1$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$$



در حالت $-1 < a < 0$ با استدلال مشابه درستی تساوی بالا را ثابت کنید.

۲. از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید که برای هر $-1 \leq x \leq 1$ داریم:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

۳. برای هر $-1 \leq x \leq 1$ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید:

$$\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

۴. برای هر x نشان دهید:

$$\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵. در مورد فرد یا زوج بودن توابع $\tan^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ چه می توان گفت؟

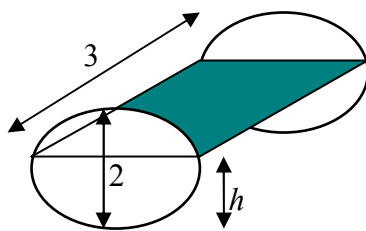
۶. برای هر عدد مثبت x نشان دهید $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ زاویه ای در بازه $(0, \pi)$ است و با

محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

تمرینات دوره ای

- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) ۳ متر است.



الف) اگر حجم گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانی متر مکعب) را با V و ارتفاع گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانی متر) را با h نشان دهیم، V تابعی از h است و این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. با توجه به شیوه تعریف، نشان دهید این تابع صعودی است.

ب) h نیز تابعی از V است، دامنه و برد آن را تعیین کنید. آیا می توانید این تابع را محاسبه کنید؟