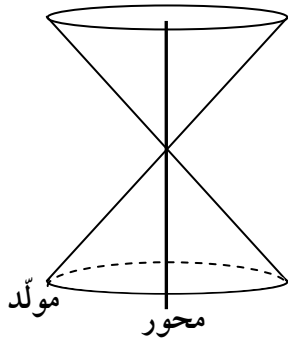
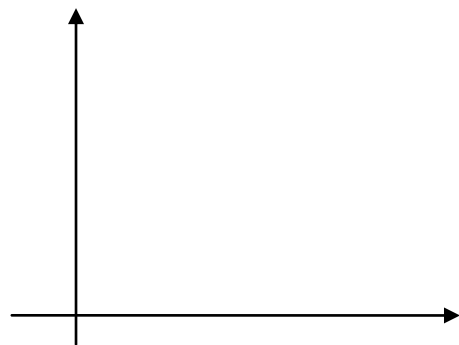




مقاطع مخروطی



دایره



مثال ۱) معادله‌ی دایره‌ای به مرکز  $w = (-۱, ۲)$  و شعاع ۵ را بنویسید.

## بررسی معادله ضمنی دایره

در هر یک از موارد زیر دایره بودن یا نبودن را بررسی نمایید:

۲) مثال  $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ .

۳) مثال  $c: 3x^2 + 3y^2 + 9x - 18y - 15 = 0$ .

۴) مثال  $c: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 10 = 0$ .

۵) مثال  $c: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ .

۶)  $c: 3x^2 + 12y^2 - 3x + 9y - 18 = 0$ .

مثال ۷) شعاع دایره‌ی  $ax^2 + y^2 + 2x + 4y = k$  برابر ۲ است در این صورت: (آزاد ۸۱)

$$k = 2 \quad (4) \quad k = -1 \quad (3) \quad k = 1 \quad (2) \quad k = 0 \quad (1)$$

مثال ۸) به ازای چند مقدار  $k$  نمودار  $kx^2 + \frac{y^2}{k} = 2x^2 + k^2 - 3$  یک دایره است؟ (آزاد ۸۵)

$$(1) \text{ دو مقدار} \quad (2) \text{ بی شمار} \quad (3) \text{ یک مقدار} \quad (4) \text{ صفر}$$

مثال ۹) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $w = (-1, 2)$  و از نقطه‌ی  $A = (3, 4)$  بگذرد؟



مثال ۱۰) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطه‌ی  $A = (3, -6)$  ,  $B = (1, 2)$  می‌گذرد؟

مثال ۱۱) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطه‌ی  $A = (3, -6)$  ,  $B = (1, 2)$  می‌گذرد و  $AB$  قطر آن است؟

مثال ۱۲) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $W = (-2, 5)$  بوده و بر خط  $L: 3x - 4y = 4$  مماس باشد؟

مثال ۱۳) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $W = (-2, 4)$  و بر محور  $x$  ها مماس باشد؟

مثال ۱۴) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $W = (-2, 4)$  بوده و بر محور  $y$  ها مماس باشد؟

مثال ۱۵) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $W = (-2, 4)$  بوده و بر هر دو محور مماس باشد؟

نکته:



مثال ۱۶) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی  $A = (1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مماس باشد.



مثال ۱۷) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دو خط  $L_1: 2x - y + 1 = 0$  ,  $L_2: 2x - y + 3 = 0$  مماس باشد.

مثال ۱۸) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دو خط  $L_1, L_2$  , مثال ۱۷ مماس بوده و مرکز آن  $W = (1, 2)$  باشد.

مثال ۱۹) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دو خط  $L_1, L_2$  , مثال ۱۷ مماس بوده و مرکز آن  $W = (1, 4)$  باشد.

مثال ۲۰) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دو خط  $L_1, L_2$  مماس بوده و مرکز آن روی خط  $d: y + x + 1 = 0$  قرار داشته باشد.

مثال ۲۱) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بردوخط  $L_1, L_2$  به معادلات زیر مماس باشد:

$$L_1: 2x + y - 1 = 0 \quad L_2: x - 2y + 2 = 0$$

مثال ۲۲) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بردوخط  $L_1, L_2$  مثال ۲۱ مماس بوده و مرکزش  $W = (0, 2)$  باشد.

مثال ۲۳) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بردوخط  $L_1, L_2$  مثال ۲۱ مماس بوده و مرکزش  $W = (-3, 2)$  باشد.

مثال ۲۴) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بردوخط  $L_1, L_2$  مثال ۲۱ مماس بوده و مرکزش  $W = (0, 1)$  باشد.

### نکته:

از هر نقطه بی شمار دایره می‌گذرد.

از هر دو نقطه‌ی متمایز نیز بی شمار دایره می‌گذرد.

از هر سه نقطه‌ی متمایز غیرهمراستا دایره‌ای منحصر به فرد می‌گذرد.

زیرا هر ۳ نقطه‌ی متمایز غیرهمراستا مثلثی پدید می‌آورند که می‌دانیم هر مثلث دارای دایره‌ی محیطی است و مرکز این دایره نقطه‌ی هم‌رسی عمود منصف هاست.

(تذکر: نقطه‌ی هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث قائم‌الزاویه در وسط وتر آن قرار دارد.)



مثال ۲۵) معادله‌ی دایره‌ی شامل نقاط  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  $C = (-3, 3)$  را بنویسید.

راه ۱) روش فاصله‌ها

راه ۲) روش عمود منصف‌ها

راه ۳) روش سه معادله، سه مجهول

راه ۴)



مثال ۲۶) اگر  $O(1, 2)$  مرکز دایره‌ی  $x^2 + y^2 - ax + 2by = 0$  باشد  $a + b$  را بدست آورید؟ (آزاد ۸۱)

مثال ۲۷) دایره به معادله‌ی  $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$  از نقطه‌ی  $(1, 1)$  می‌گذرد، شعاع آن را بدست آورید؟

(سراسری ۷۲/۷۴ و سنجش ۸۲)

مثال ۲۸) طول قطر دایره‌ی  $4(x-1)^2 + (2y+1)^2 = 1$  چقدر است؟ (آزاد ۷۸)

مثال ۲۹) سطح دایره‌ی  $(2x+2)^2 + (2y-4)^2 = 12$  در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟ (آزاد ۸۳)

مثال ۳۰) دایره‌ی  $8x^2 + 16x + 8y^2 = 4$  محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (آزاد ۸۳/پزشکی)

مثال ۳۱) معادله‌ی قطری از دایره  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  که عمود بر نیمساز ربع اول و سوم باشد را بدست آورید؟

(سراسری ۷۶)

مثال ۳۲) اگر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بر خطی به معادله  $3x + 4y = 10$  مماس باشد بر کدام خط زیر نیز مماس است؟  
(آزمون گزینه ی ۲ / ۸۲)

$$4x - 3y = 10 \quad (۴) \quad 3x - 4y = 6 \quad (۳) \quad 4x + 3y = 20 \quad (۲) \quad 3x + 4y = 5 \quad (۱)$$

مثال ۳۳) تفاضل بیشترین و کمترین مقدار  $a$  که به ازای آن‌ها خط  $y + 3x = a$  بر دایره  $2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 0$  مماس می‌شود کدام است؟

$$6 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 5 \quad (۱)$$

مثال ۳۴) شعاع دایره‌ای که از  $A(3, 0)$ ,  $B(1, 2)$  گذشته و مرکز آن روی خط  $y = 2x - 1$  است چقدر است؟ (سراسری ۷۶)

مثال ۳۵) معادله‌ی دایره‌ای را بیابید که بر دو خط  $y = x + 3$ ,  $y = x - 1$  مماس و طول مرکزش برابر یک است؟  
(سراسری ۷۴)


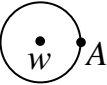

مثال ۳۶) طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(0, -3)$  می‌گذرد را بیابید؟ (سراسری ۸۲ / تجربی)



مثال ۳۷) دسته خطوط به معادلات  $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$  قطرهای یک دایره هستند، اگر این دایره از نقطه‌ی  $A(5, 2)$  عبور کند شعاع دایره چقدر است؟ (سراسری ۷۷ و ۸۳ و ...)

مثال ۳۸) معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی  $A(2, 4)$ ،  $\sqrt{2}$  برابر فاصله‌ی آن‌ها از  $B(1, 2)$  می‌باشد را بیابید؟ (سراسری ۷۷ و ... / تمرین کتاب درسی)

### اوضاع نسبی نقطه و دایره:

|                                                                                     | ضمنی | استاندارد |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|------|
|  |      |           | خارج |
|  |      |           | روی  |
|  |      |           | درون |

مثال ۳۹) معادله‌ی دایره به صورت  $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$  مفروض است مطلوب‌ست بررسی وضعیت هریک از نقاط داده شده نسبت به آن.

الف)  $A = (0, 0)$       ب)  $B = (4, -5)$       ج)  $C = (1, 0)$

مثال ۴۰) معادله‌ی دایره به صورت  $f: x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$  مفروض است مطلوب‌ست بررسی وضعیت هریک از نقاط داده شده نسبت به آن.

الف)  $A = (1, 1)$       ب)  $B = (0, 1)$       ج)  $C = (5, 2)$



مثال ۴۱) در هر یک از موارد زیر تعداد نقاط با مختصات صحیح درون دایره را تعیین کنید:

الف)  $x^2 + y^2 = 9$

ب)  $x^2 + y^2 = 4$

ج)  $x^2 + y^2 = 16$

د)  $x^2 + y^2 = 3$

اوضاع نسبی خط و دایره:



تذکر مهم:

- در هریک از موارد زیر وضعیت خط  $L$  را با دایره  $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$  بررسی نمایید:

۴۲)  $L: x = 2$

۴۳)  $L: y = 5$

۴۴)  $L: y = x + 1$

۴۵)  $L: y = -x$

تذکر: اگر نقطه‌ای درون دایره باشد مماسی از آن نسبت به دایره نمی توان رسم کرد؛ اگر نقطه‌ای روی دایره باشد یک مماس نسبت به دایره می توان رسم کرد؛ اگر نقطه‌ای خارج دایره باشد دو مماس هم اندازه نسبت به دایره می توان رسم کرد.

- در هر یک از موارد زیر معادله‌ی خط مماسی که از نقطه‌ی  $A$  نسبت به دایره‌ی  $C$  رسم می شود را بنویسید.

۴۶)  $C: x^2 + y^2 = 2$  ,  $A = (1, 1)$

$$47) C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4, A = (1, 0)$$

$$48) C: x^2 + y^2 = 2, A = (4, 0)$$

$$49) C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4, A = (5, -2)$$

مثال ۵۰) طول مماس مثال ۴۸ را بیابید؟



•  
A

طول مماس بر دایره:

مثال ۵۱) طول مماس مرسوم از  $A = (6, 1)$  رانسیب

به دایره  $f: x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$  بیابید؟

نکته:



مثال ۵۲) دایره‌ای به مرکز  $w = (0, 1)$  و مکان هندسی نقطه‌ی  $M(t^2, 1+t^2)$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (آزاد ۸۳)

۱) در یک نقطه مماسند      ۲) نقطه‌ی مشترک ندارند      ۳) در دو نقطه برهم مماسند      ۴) متقاطعند

مثال ۵۳) خط  $5x + 12y = 14$  دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$  را در دو نقطه‌ی  $A, B$  قطع می‌کند، فاصله‌ی  $B, A$  چقدر است؟ (آزاد ۸۳/سراسری ۷۵ و ...)

مثال ۵۴) طول قطعه مماسی که از  $A(4, 1)$  بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  رسم می‌شود را بدست آورید؟ (سراسری ۸۴)

زاویه بین خط و دایره:



مثال ۵۵) زاویه ی بین خط  $L: 3x - y - 1 = 0$  و دایره ی  $C: x^2 + y^2 - 4x = 1$  را بیابید؟

## خط عمود بر دایره:

مثال ۵۶)  $m$  را چنان بیابید که خط  $L: mx + 2y = 7$  بر دایره ی  $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = m^2 + 1$  عمود باشد.

مثال ۵۷) اگر خط  $y + ax - 3 = 0$  بر هر دو دایره ی  $C_1: x^2 + y^2 - by = 3$  ,  $C_2: x^2 + y^2 - 6y + 2x = 0$  عمود باشد،  $a, b$  را بیابید.

**نکته:** از هر نقطه به جز مرکز نسبت به دایره فقط یک خط عمود می توان رسم کرد. از مرکز دایره نسبت به دایره بی شمار عمود می توان رسم کرد.

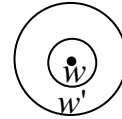
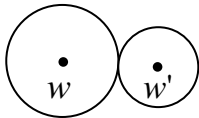
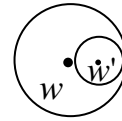
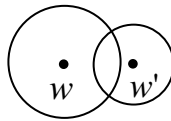
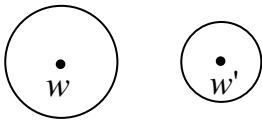
مثال ۵۸) از نقطه ی  $A(-2, 4)$  بی شمار خط بردایره ی  $C: x^2 + y^2 + ax - by = 0$  عمود شده است،  $a, b$  را بیابید.

مثال ۵۹) معادله ی دایره ای را بنویسید که خط  $\Delta$  به معادله ی زیر بر آن عمود بوده و خط  $d: x + y = 2$  قطری از آن دایره بوده و همچنین این دایره برنیمساز ناحیه های دوم و چهارم مماس باشد.  $\Delta = 3x - y = 2$



بیشترین و کمترین فاصله‌ی نقطه تا دایره:

اوضاع نسبی دو دایره:



دو دایره عمود برهم:

مثال ۶۰) وضعیت نسبی دو دایره‌ی  $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$  ،  $C': x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$  را بررسی نمایید.



**نکته:** برای یافتن معادله‌ی مماس مشترک دو دایره‌ی مماس خارج؛ معادله‌ی دو دایره را از هم کم می‌کنیم.  
مثال ۶۱) معادله‌ی مماس مشترک دو دایره‌ی مثال قبل را بیابید.

مثال ۶۲) وضعیت نسبی دو دایره‌ی  $C: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  ,  $C': x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$  را بررسی نمایید.

**نکته:** برای یافتن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع؛ معادله‌ی دو دایره را از هم کم می‌کنیم.  
مثال ۶۳) معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی مثال قبل را بیابید.

مثال ۶۴) اگر دو دایره‌ی  $C: x^2 + y^2 - 10x + a = 0$  ,  $C': x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  دارای ۳ مماس مشترک باشند  $a$  را بیابید؟

مثال ۶۵) شعاع کوچکترین دایره‌ای که بر دو دایره‌ی  $(x-3)^2 + y^2 = 25$  ,  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  مماس است چقدر است؟  
(آزاد ۸۴)





مثال ۶۶) معادله‌ی قطرهای یک دایره به صورت زیر است؛ معادله‌ی این دایره را چنان بیابید که این دایره از مبدأ مختصات بگذرد؟

$$(m-1)x + 2my - m + 1 = 0$$

مثال ۶۷)  $n, m$  را چنان بیابید که معادله‌ی زیر یک دایره باشد.

$$(m+2)x^2 + y^2 + nx - 2y + 1 = 0$$

مثال ۶۸) به ازای چه مقدار  $b$  دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$  مماس داخل اند؟  
(سراسری ۸۶)

مثال ۶۹) فاصله‌ی نقطه  $M(x, y)$  از نقطه‌ی  $A(1, 0)$  واقع بر محور  $x$  ها، برابر نصف فاصله‌ی  $M$  از نقطه‌ی  $B(0, 3)$  است در منحنی مکان هندسی  $M$ ، اندازه‌ی بزرگترین وتر را بیابید؟ (سراسری ۸۸)



مثال ۷۰) به ازای کدام مقدار  $a$  دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$  مماس خارج یکدیگرند؟ (سراسری ۹۰)

مثال ۷۱) دایره ای برخط به معادله  $y = 2x - 1$  مماس است و تمام قائم های آن دایره از نقطه  $(2, -1)$  می گذرند.

بیشترین فاصله ی نقاط این دایره از محور  $x$  ها کدام است؟ (خارج کشور ۸۹)

- (۱)  $2 + \sqrt{5}$       (۲)  $3 + \sqrt{2}$       (۳) ۵      (۴) ۶



بیضی

مشخصات عمومی بیضی ها:

-۱

-۲

-۳

-۴

-۵

-۶

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

-۷ در هر بیضی داریم:

-۸

تذکر مهم:

تذکر مهم:



۹- قطر بیضی:

۱۰- وتر کانونی:

۱۱-

۱۲-

۱۳- بررسی وضعیت نقطه و بیضی:



۱۴- مماس بر بیضی:

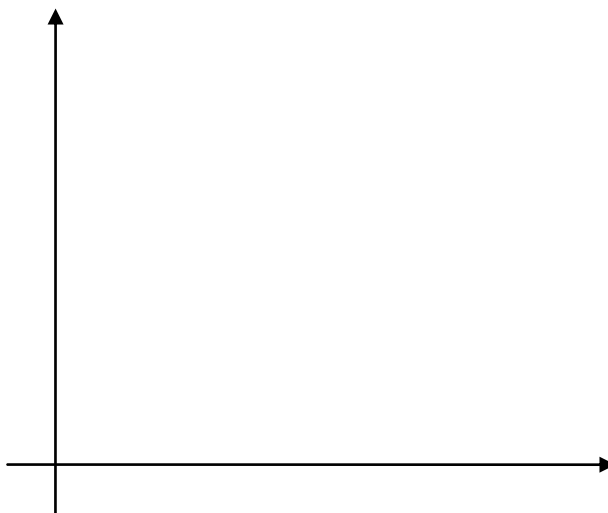
۱۵-

۱۶-

۱۷- وجود بیضی:

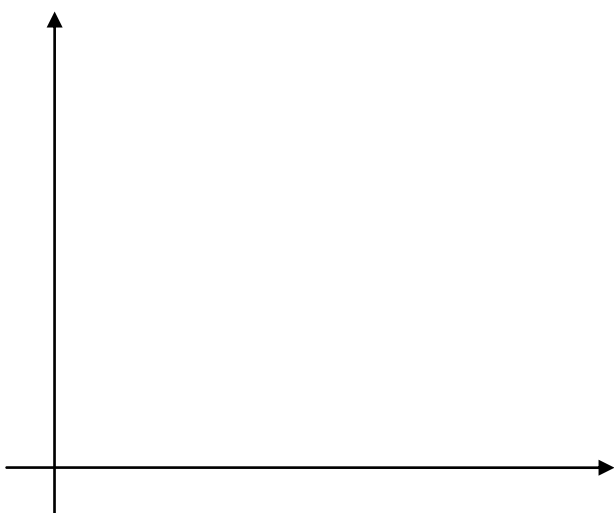
بدست آوردن معادله بیضی

بیضی افقی



$w = (\alpha, \beta)$   
 $F =$   
 $F' =$   
 $A =$   
 $A' =$   
 $B =$   
 $B' =$

بیضی قائم



$w = (\alpha, \beta)$   
 $F =$   
 $F' =$   
 $A =$   
 $A' =$   
 $B =$   
 $B' =$



با توجه به اطلاعات داده شده در هر یک از موارد زیر معادله ی بیضی را بنویسید:

مثال ۷۲)  $A = (۳, -۲)$  ,  $A' = (-۳, -۲)$  ,  $e = \frac{۱}{۲}$

مثال ۷۳)  $B = (۳, -۲)$  ,  $B' = (-۳, -۲)$  ,  $e = \frac{۱}{۲}$

مثال ۷۴)  $F = (۳, -۲)$  ,  $F' = (-۳, -۲)$  ,  $e = \frac{۱}{۲}$

مثال ۷۵)  $A = (۴, -۲)$  ,  $A' = (۴, ۲)$  ,  $F = (۴, ۲)$



مثال (۷۶)  $A = (5, 1), B = (2, 0)$

مثال (۷۷)  $A = (3, -1), B = (1, 0)$

(سراسری ۷۴)  $2\sqrt{5}$  قطر بزرگ و  $F = (1, 1), F' = (1, -1)$  (مثال ۷۸)

\* در هر یک از موارد زیر با توجه به معادله‌ی داده شده، نوع بیضی، مختصات مرکز، رئوس کانون، رئوس کانونی، کانون‌ها، طول فاصله‌ی کانونی، قطر کانونی، قطر ناکانونی، وتر کانونی، خروج از مرکز و مساحت بیضی را بدست آورید:

مثال (۷۶)  $4x^2 + 9y^2 = 36$

مثال (۷۹)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$





$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 \quad (\text{مثال ۸۰})$$

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0 \quad (\text{مثال ۸۱})$$

$$x^2 + 100y^2 + 200y = 0 \quad (\text{مثال ۸۲})$$

**معادله ی ضمنی (گسترده) بیضی:**

نکته: یافتن مرکز بیضی

نکته: یافتن خروج از مرکز بیضی



مثال ۸۳) اگر  $(۱, ۲)$  مرکز بیضی  $۴x^2 + y^2 - ax + by = ۰$  باشد،  $a + b$  را بیابید؟ (مشابه آزاد ۸۱)

مثال ۸۴) خروج از مرکز بیضی  $(۲x + y)^2 + (۲x - y)^2 = ۱$  چقدر است؟ (آزاد ۸۱)

مثال ۸۵) خروج از مرکز قطع مخروطی  $(x + ۷y + ۴)(x - ۲y + ۳) = (x + y + ۱)(۴x + y + ۲)$  را بدست آورید؟ (آزاد ۸۲)

مثال ۸۶) اگر خروج از مرکز بیضی قائم  $ax^2 + ۴y^2 + ۱۶y - ۲x + ۱۳ = ۰$  برابر  $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$  باشد  $a$  را بدست آورید.

مثال ۸۷) فاصله ی کانونی یک بیضی برابر ۸ و فاصله ی کانون از رأس مجاورش برابر ۱ است، مطلوبست طول قطر کانونی و ناکانونی؟

مثال ۸۸) خروج از مرکز یک بیضی  $\frac{۴}{۵}$  و قطر کانونی آن ۱۰ است مطلوبست طول قطر ناکانونی آن؟



مثال ۸۹) در بیضی به معادله  $4x^2 + 9y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$  چند قطر باطول صحیح وجود دارد؟

مثال ۹۰) در یک بیضی فاصله ی کانون از دورترین نقطه ی بیضی برابر ۳ و از نزدیکترین نقطه ی بیضی برابر یک است. مطلوبست خروج از مرکز بیضی؟

مثال ۹۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که می توان از آن جا مماس هایی با طول برابر نسبت به بیضی  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  رسم کرد؟

مثال ۹۲) دو کانون یک بیضی هستند و خط  $L: 2x - 3y - 1 = 0$  براین بیضی مماس است. مطلوبست معادله ی بیضی؟



مثال ۹۳)  $a$  رابه طوری بیابید که خط  $x=a$  بر بیضی  $x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$  مماس باشد.

مثال ۹۴) نقطه‌ی  $A=(3, 0)$  و بیضی به معادله‌ی  $x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$  مفروضند. مطلوبست معادله‌ی خط مماس بر بیضی که از  $A$  می‌گذرد.

مثال ۹۵) خروج از مرکز بیضی زیر رابا شرط  $0 < k < 1$  بیابید:

$$k^2(x-1)^2 + (y-1)^2 = k$$

مثال ۹۶) خطی از مرکز بیضی به معادله‌ی  $3x^2 + 4y^2 = 7$  گذشته است و در آن قطری به طول  $2\sqrt{2}$  پدید آورده است. مطلوبست زاویه‌ی این خط با محور  $x$  ها.



مثال ۹۷) معادله ی  $y = 2 \pm \sqrt{-2x^2 + 3x + 1}$  چیست؟

مثال ۹۸) در یک بیضی محدوده ی طول و عرض نقاط واقع بر بیضی را بیابید.

مثال ۹۹) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فواصلشان از دو نقطه ی  $(1,0)$ ,  $(3,0)$  برابر مقدار ثابت ۴ باشد.

مثال ۱۰۰) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فواصلشان از دو نقطه ی  $(1,0)$ ,  $(3,0)$  برابر مقدار ثابت ۲ باشد.

مثال ۱۰۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فواصلشان از دو نقطه ی  $(1,0)$ ,  $(3,0)$  برابر مقدار ثابت ۱ باشد.



مثال ۱۰۲) کانون های بیضی به معادله  $۲x^2 + ۷y^2 - ۴x = ۱۲$  دوسر قطری از دایره اند. این دایره نیمساز ناحیه اول را با چه طولی قطع می کند؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

مثال ۱۰۳) بیشترین مساحت از بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله  $۴x^2 + y^2 - ۴x = ۳$  و دو رأس دیگر آن کانون های این بیضی باشند کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۲ (۱)                      ۳ (۲)                       $\sqrt{۲}$  (۳)                       $\sqrt{۳}$  (۴)

هذلولی

مشخصات عمومی هذلولی ها:

-۱

-۲

-۳

-۴

-۵

-۶

$$\left| |MF| - |MF'| \right| = 2a$$

-۷ در هر هذلولی داریم:

-۸

تذکر مهم:



-۹

۱۰- وتر کانونی:

-۱۱

۱۲- هذلولی متساوی القطرین:

۱۳- بررسی وضعیت نقطه و هذلولی:



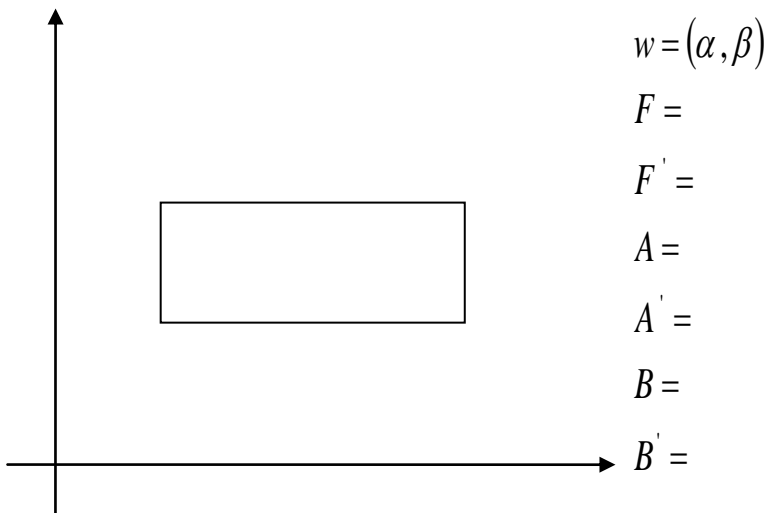


-۱۴

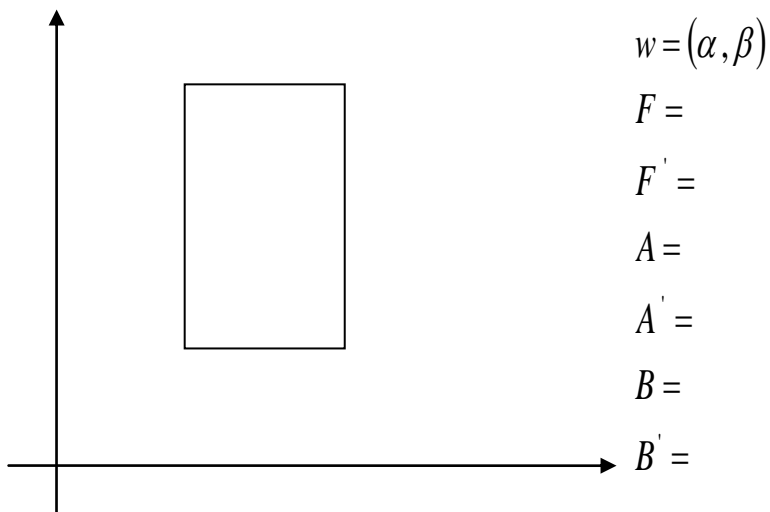
-۱۵

بدست آوردن معادله هذلولی

هذلولی افقی



هذلولی قائم





با توجه به اطلاعات داده شده در هر یک از موارد زیر معادله ی هذلولی را بنویسید:

مثال (۱۰۴)  $A = (3, -2)$  ,  $A' = (-3, -2)$  ,  $e = 2$

مثال (۱۰۵)  $B = (3, -2)$  ,  $B' = (-3, -2)$  ,  $e = 2$

مثال (۱۰۶)  $F = (3, -2)$  ,  $F' = (-3, -2)$  ,  $e = 3$

مثال (۱۰۷)  $A = (4, -2)$  ,  $A' = (4, 4)$  ,  $F = (4, 12)$



مثال (۱۰۸)  $A = (5, 1), B = (2, 0)$

مثال (۱۰۹)  $A = (3, -1), B = (1, 0)$

مثال (۱۱۰)  $F = (1, 4), F' = (1, -4)$  و قطر کانونی  $2\sqrt{5}$

\* در هر یک از موارد زیر با توجه به معادله‌ی داده شده، نوع هذلولی، مختصات مرکز، رئوس کانون، رئوس کانونی، کانون ها، طول فاصله‌ی کانونی، قطر کانونی، قطر ناکانونی، وتر کانونی، خروج از مرکز و معادله مجانب ها و زوایه‌ی بین آن‌ها را بدست آورید:

مثال (۱۱۲)  $4x^2 - 9y^2 = 36$

مثال (۱۱۱)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$



مثال ۱۱۳)  $9x^2 - 16y^2 = 144$

مثال ۱۱۴)  $4x^2 - 8x - 9y^2 + 36y = 0$

مثال ۱۱۵)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

**معادله ی ضمنی (گسترده) هذلولی:**

نکته: یافتن مرکز هذلولی

تذکر مهم:



مثال ۱۱۶) اگر  $A=(2,1), A'=(0,1)$  رئوس کانونی هذلولی باشد که خروج از مرکز آن  $\sqrt{5}$  است مطلوبست معادله این هذلولی.

مثال ۱۱۷) اگر  $F=(6,0), F'=(-4,0)$  کانون های هذلولی باشند که فاصله کانون  $F$  تا رأس  $A$  در آن برابر ۱ است مطلوبست معادله هذلولی.

مثال ۱۱۸) اگر  $A=(2,1), B=(3,-1)$  به ترتیب رئوس کانونی و ناکانونی یک هذلولی باشند مطلوبست معادله آن.

مثال ۱۱۹) مجانب های یک هذلولی به صورت  $y = x+1$ ,  $y = -(x+1)$  می باشد. اگر  $f = (-1, \sqrt{5})$  یکی از کانون های هذلولی باشد مطلوبست معادله آن.

مثال ۱۲۰) زاویه بین مجانب های زیر را بیابید.

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

مثال ۱۲۱)  $m$  را چنان بیابید که مجانب های هذلولی زیر بر یکدیگر عمود باشند.

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{1-m} = 1$$

مثال ۱۲۲) دو نقطه  $M, N$  هر یک بر یکی از شاخه های هذلولی زیر متحرک است. مطلوبست  $\min$  طول  $MN$

$$4y^2 - 9x^2 + 18x = -16$$

نکته مهم: می توان معادله هر هذلولی را به صورت حاصل ضرب معادلات مجانبهایش نوشت.

نکته: حاصل ضرب معادلات مجانب های هر هذلولی ثابت است.

مثال ۱۲۳) معادلات مجانب های هذلولی به صورت  $3x-2y=5$ ,  $3x+2y=1$  است. اگر این هذلولی از نقطه  $M = (3, -1)$  بگذرد مطلوبست معادله آن.



مثال (۱۲۴) هر دو کانون هذلولی به معادله  $ax^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$  بر روی خطی موازی محور  $x$  هاست. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۵)

- (۱)  $-8 < a < -4$       (۲)  $-4 < a < 0$       (۳)  $-2 < a < 0$       (۴)  $0 < a < 8$

مثال (۱۲۵) مجانب های هذلولی به معادله  $\frac{1}{4}x^2 - y^2 + ax + by = 1$  در نقطه  $(-2, 1)$  متقاطعند عرض از مبدا خط مجانب با شیب مثبت را بیابید؟ (سراسری ۹۰)

مثال (۱۲۶) هر یک از دو شاخه هذلولی  $x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0$  محور  $y$  ها را در یک نقطه قطع می کند. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟ (خارج کشور ۸۷)

- (۱)  $|a| < 2$       (۲)  $|a| > 2$       (۳)  $|a| < 4$       (۴)  $|a| > 4$

مثال (۱۲۷) نقاط  $A(2, 0)$  ,  $A'(0, 0)$  دو رأس و  $F(1 + \sqrt{5}, 0)$  یکی از کانون های هذلولی است مطلوبست معادله ی آن؟ (خارج کشور ۹۰)





سهمی

مشخصات عمومی سهمی ها:

(۱)


(۲)

(۳)

(۴)

(۵)

(۶)




سهمی افقی روبه راست

$s = (\alpha, \beta)$

خط هادی :

محور تقارن :

$F$  کانون :




سهمی افقی روبه چپ

$s = (\alpha, \beta)$

خط هادی :

محور تقارن :

$F$  کانون :




سهمی قائم روبه بالا

$s = (\alpha, \beta)$

خط هادی :

محور تقارن :

$F$  کانون :



سهمی قائم روبه پایین

$s = (\alpha, \beta)$

خط هادی :

محور تقارن :

$F$  کانون :



در هریک از موارد زیر نوع سهمی، مختصات رأس و کانونی معادلات خطوط ها و محور تقارن و طول وتر کانونی را بیابید.

$$\text{مثال (۱۲۸)} \quad x^2 + 16y = 0$$

$$\text{مثال (۱۲۹)} \quad y^2 - 2y - 8x = 15$$

$$\text{مثال (۱۳۰)} \quad \frac{1}{2}y^2 + 4x = 0$$

می توان قدر مطلق متغیری را که درجه آن یک است به عنوان طول وتر کانونی سهمی در نظر بگیریم. برای بررسی وضعیت یک نقطه و سهمی مختصات نقطه را درون معادله سهمی قرار می دهیم. اگر صفر شد یعنی نقطه روی سهمی است. مثبت شد نقطه خارج سهمی و منفی شد نقطه داخل سهمی است. رأس سهمی بر سهمی واقع است پس مختصات آن در معادله سهمی صدق می کند. برای یافتن مختصات رأس سهمی بدین ترتیب عمل می کنیم که نسبت به متغیری که توان ۲ دارد مشتق گرفته برابر صفر قرار می دهیم بدین ترتیب یکی از مختصه های رأس سهمی را می یابیم. چون رأس سهمی بر سهمی قرار دارد با نهادن این مختصه در معادله سهمی مختصه دیگر رأس آن حاصل می شود.

مختصات رأس سهمی زیر را بیابید.

$$\text{مثال (۱۳۱)} \quad f: y^2 + 2y - 4x - 3 = 0$$



مثال (۱۳۲) در سهمی به معادله  $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$  معادله ی خط هادی را بیابید؟ (خارج کشور ۸۸)

نکته (۱): مکان هندسی نقاطی از صفحه که می توان از آن جا مماس هایی عمود برهم نسبت به یک دایره رسم کرد. دایره ای است به همان

مرکز و به شعاع  $R\sqrt{2}$

نکته (۲): مکان هندسی نقاطی از صفحه که می توان از آن جا مماس هایی عمود برهم نسبت به بیضی رسم نمود دایره ای است به همان

مرکز و به شعاع  $\sqrt{a^2 + b^2}$

نکته (۳): مکان هندسی نقاطی از صفحه که می توان از آن جا مماس هایی عمود برهم نسبت به هذلولی رسم کرد دایره ای است به همان

مرکز و به شعاع  $\sqrt{a^2 - b^2}$

نکته (۴): خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که می توان از آن جا مماس هایی عمود برهم نسبت به سهمی رسم کرد.



بررسی معادله ضمنی مقاطع مخروطی:



در هریک از موارد زیر نوع مقطع مخروطی را دقیقاً مشخص نمایید.

مثال (۱۳۳)  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$

مثال (۱۳۴)  $4x^2 + y^2 - 32x + 6y + 57 = 0$





در هریک از موارد زیر نوع مقطع مخروطی را مشخص نمایید.

مثال (۱۳۵)  $x^2 - xy + y^2 = 20$

مثال (۱۳۶)  $x^2 - 3xy + y^2 = 2$





مثال ۱۳۷)  $xy = +۲$

مثال ۱۳۸)  $۱۷x^2 - ۶xy + ۹y^2 - ۷۳ = ۰$

مثال ۱۳۹)  $۵x^2 + ۲xy + y^2 = ۰$

مثال ۱۴۰)  $۴x^2 + ۴xy + y^2 = ۰$

مثال ۱۴۱)  $۹x^2 + ۶xy + y^2 = ۴۹$



نکته مهم:

مثال (۱۴۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه  $A(1,2)$  برابر فاصله آن‌ها از خط  $L$  به معادله  $L: y = 3$  باشد.

مثال (۱۴۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه  $A(1,2)$  دو برابر فاصله آن‌ها از خط  $L$  به معادله  $L: y = 3$  باشد.

مثال (۱۴۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه  $A(1,2)$  نصف فاصله آن‌ها از خط  $L$  به معادله  $L: y = 3$  باشد.

نکته:

مثال (۱۴۵) محورهای مختصات را به اندازه‌ی مناسب در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا مقطع مخروطی به معادله  $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1$  به شکل استاندارد نوشته شود. مقدار  $\alpha$  بر حسب مختصات در دستگاه دوران یافته را بنویسید؟ (سراسری ۸۹)